Chương 7 BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC (DFT) VÀ GIẢI THUẬT BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH (FFT)

Nội dung:

Chương 7 BIẾN ĐỔI DFT VÀ GIẢI THUẬT FFT

7.1 Biến đổi Fourier rời rạc DFT (Discrete Fourier Transform):

7.1.1 Định nghĩa:

❖ DTFT được sử dụng rộng rãi khi nghiên cứu tín hiệu ở dạng giải tích.

Tuy nhiên, nó có 2 hạn chế:

- Độ dài tín hiệu là vô cùng >< thực tế là hữu hạn.
- Biến Ω là liên tục >< yêu cầu xử lý (trên máy tính,..) là rời rạc.

Giải pháp đưa ra: **DFT**

❖ Giả sử x(n) là tín hiệu rời rạc có chiều dài hữu hạn L. Công thức biến đổi DFT N điểm ($N \geq L$) của x(n) là:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}; \quad k = \overline{0,\ldots,N-1}$$ (DFT)

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}; \quad n = \overline{0,\ldots,N-1}$$ (IDFT)

❖ DFT đóng vai trò quan trọng trong xử lý số tín hiệu (ví dụ: phân tích phổ, lọc tín hiệu,..) do tồn tại các cách tính DFT hiệu quả (chẳng hạn như giải thuật FFT).

Ví dụ 1: Cho tín hiệu:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & ,0 \le n \le L-1 \\ 0 & ,n : elsewhere \end{cases}$$

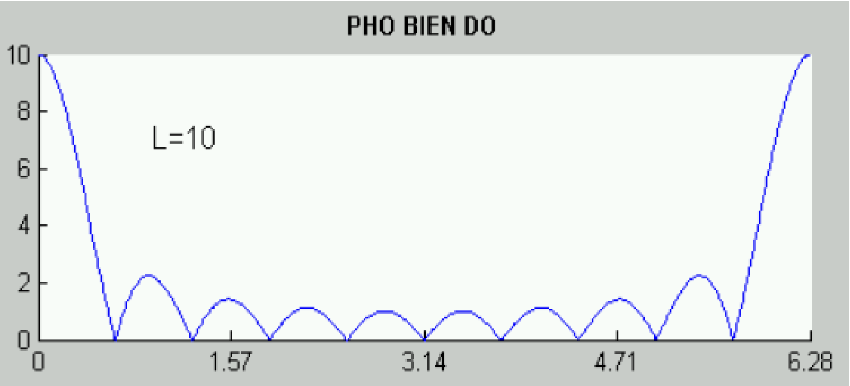
a. Xác định và vẽ phổ tín hiệu X(Ω).
b. Xác định và vẽ DFT N điểm (N≥L).

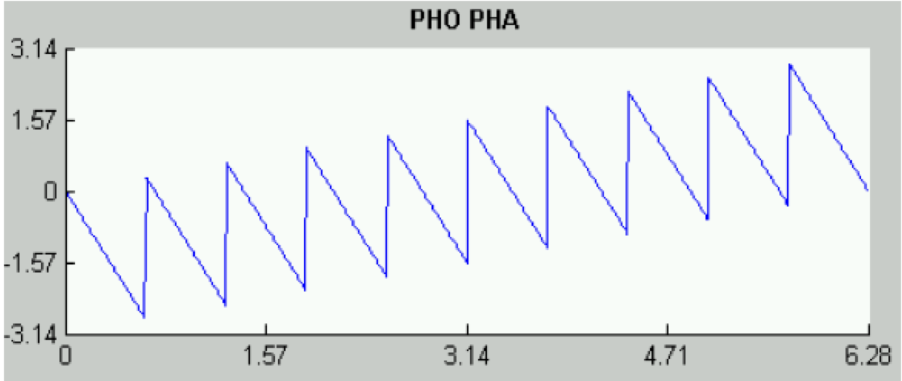
Lời giải:

a. Dùng biến đổi DTFT:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} 1.e^{-j\Omega n} = \frac{1-e^{-jn\Omega L}}{1-e^{-j\Omega n}} = \frac{\sin \Omega L/2}{\sin \Omega/2} e^{-j\Omega(L-1)/2}$$

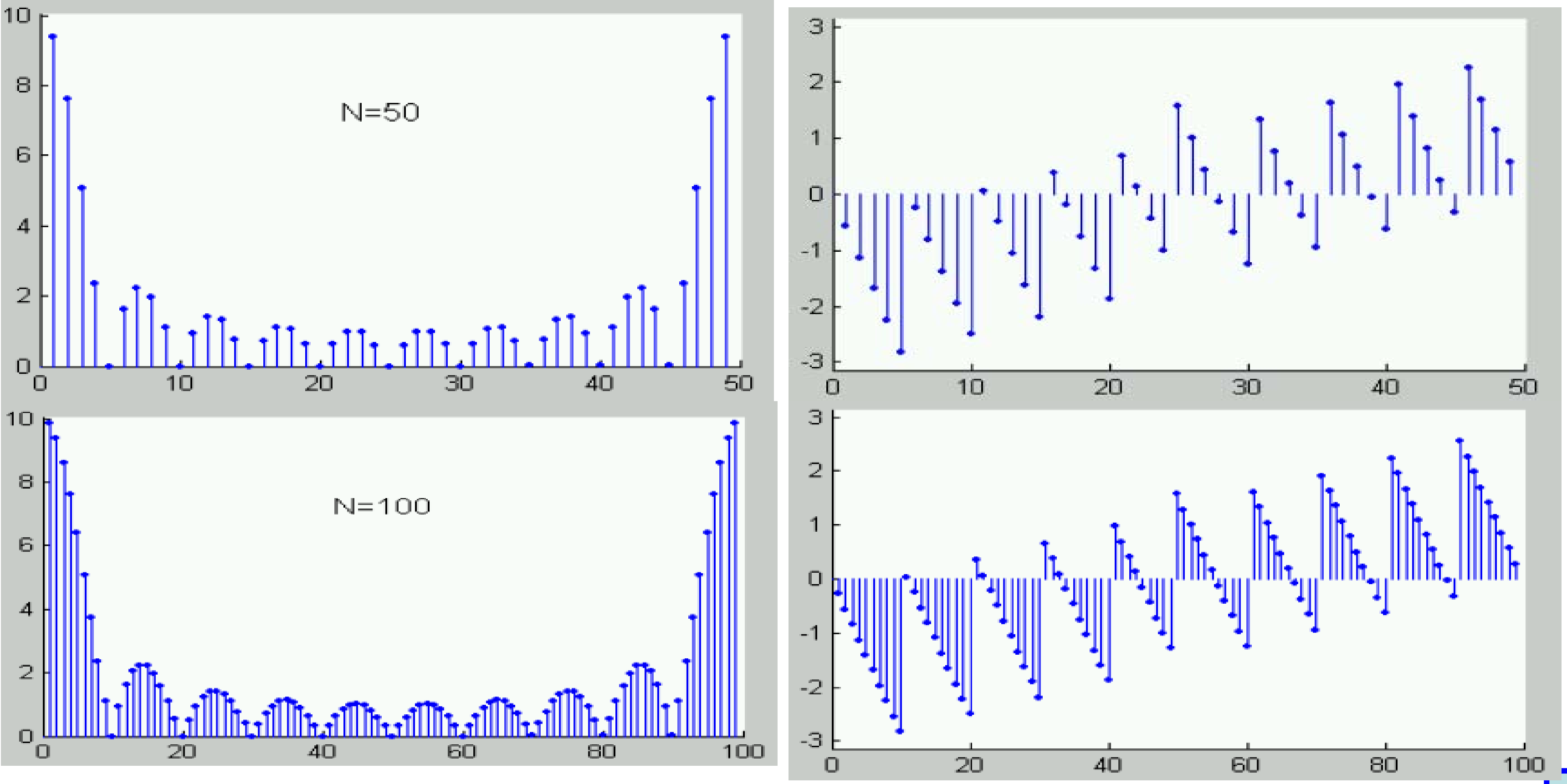
$$\Rightarrow |X(\Omega)| = \left| \frac{\sin \Omega L/2}{\sin \Omega/2} \right|; \qquad \angle X(\Omega) = -\Omega(L-1)/2$$





b. Dùng công thức DFT N điểm:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1-e^{-j2\pi kL/N}}{1-e^{-j2\pi k/N}} = \frac{\sin \pi kL/N}{\sin \pi k/N} e^{-j\pi k(L-1)/N}$$



Chương 7 BIẾN ĐỔI DFT VÀ GIẢI THUẬT FFT(tt)

❖ Biểu diễn dạng ma trận:

➢ Đặt : $W_N = e^{-j2\pi/N}$, lúc đó:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}; \quad k = \overline{0,\dots,N-1}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}; \quad n = \overline{0,\dots,N-1}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}; \quad X_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}; \quad W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

➢ Công thức DFT và IDFT được viết lại như sau:

$$X_N = W_N x_N \qquad \text{(DFT)}$$

$$x_N = \frac{1}{N} W_N^* X_N \qquad \text{(IDFT)}$$

→ Cho X(k) tìm x(n) dùng DFT ????

Ví dụ 2: Cho tín hiệu: x(n) = {0,1,2,3}. Tìm DFT 4 điểm ?

Lời giải:

- Dùng trực tiếp định nghĩa:
- Dùng dạng ma trận:

$$W_N^{k+N} = W_N^k$$

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

$$W_4 = \begin{bmatrix} w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 \\ w_4^0 & w_4^1 & w_4^2 & w_4^3 \\ w_4^0 & w_4^2 & w_4^4 & w_4^6 \\ w_4^0 & w_4^3 & w_4^6 & w_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_4^1 & w_4^2 & w_4^3 \\ 1 & w_4^2 & w_4^0 & w_4^2 \\ 1 & w_4^3 & w_4^2 & w_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$$X_4 = W_4 x_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2+2j \\ -2 \\ -2-2j \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X(k) = \{6; -2+2j; -2; -2-2j\}$$

7.1.2 Các tính chất của DFT:

a. Tuần hoàn:

➢ *X(k) tuần hoàn với chu kỳ N, nghĩa là: X(k+N) = X(k),* $\forall k$

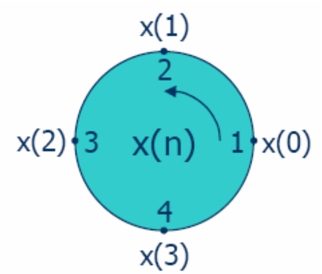
b. Tuyến tính:

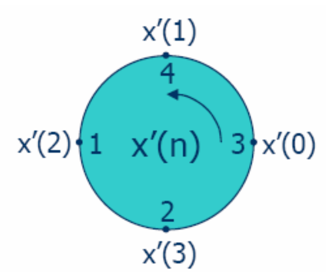
$$\left.\begin{array}{l} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_2(k) \end{array}\right\} \Rightarrow a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} a_1X_1(k) + a_2X_2(k), \forall a_1, a_2$$

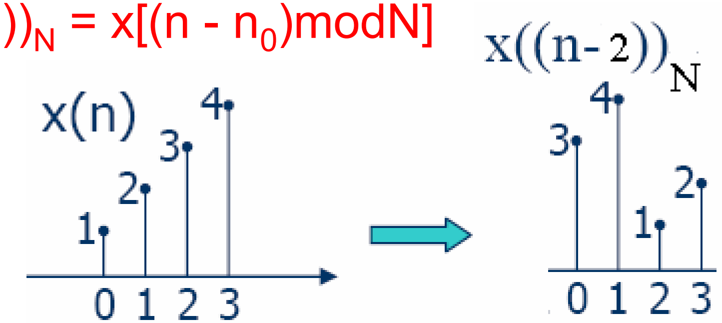
c. Dịch vòng:

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k) \Rightarrow \begin{cases} x((n-n_0))_N \xleftrightarrow{DFT} X(k)e^{-j2\pi k n_0/N} \\ x(n)e^{j2\pi k_0 n/N} \xleftrightarrow{DFT} X((k-k_0))_N \end{cases}$$

❖ ***Khái niệm dịch vòng:*** *x'(n)* = $x((n-n_0))_N = x[(n-n_0)\bmod N]$



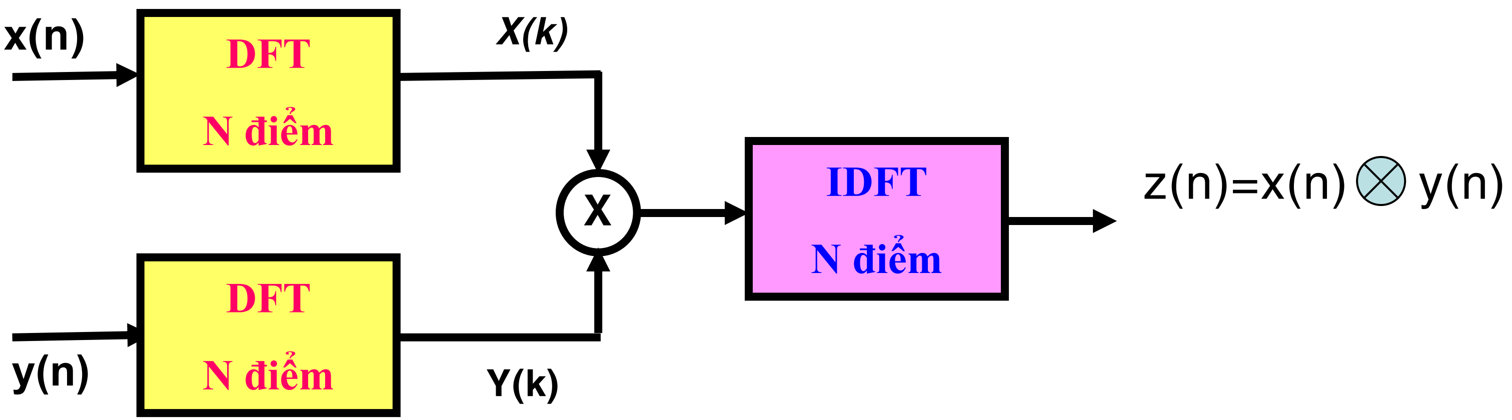




7.1.2 Các tính chất của DFT:

d. Tích chập vòng:

$$\left.\begin{aligned} x(n) &\xleftrightarrow{DFT} X(k) \\ y(n) &\xleftrightarrow{DFT} Y(k) \end{aligned}\right\} \Rightarrow z(n) = x(n) \otimes y(n) \xleftrightarrow{DFT} Z(k) = X(k)Y(k)$$



- *Tích 2 DFT ~ tích chập vòng trong miền thời gian.*

❖ ***Khái niệm tích chập vòng:***

$$x(n) \otimes y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y[(n-m) \bmod N]$$

7.1.3 Lọc tuyến tính dựa vào DFT:

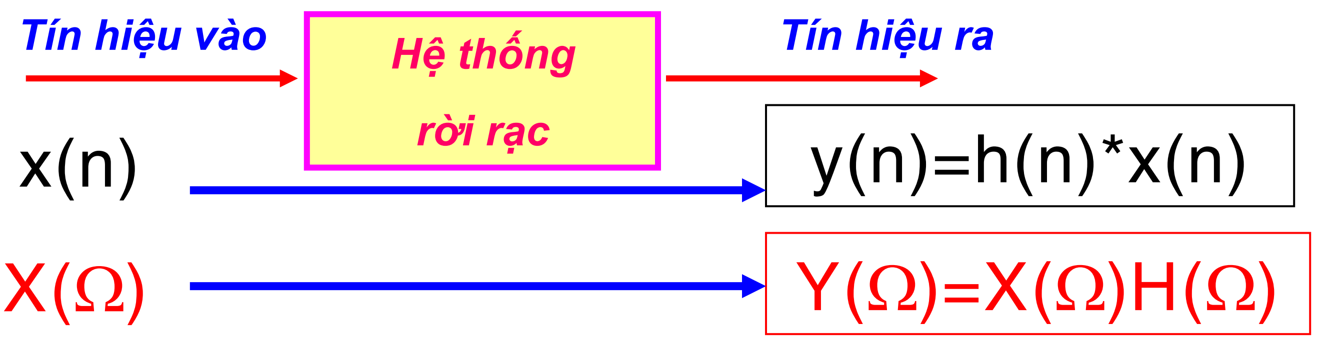
- Ngõ ra hệ thống LTI: tích chập thông thường giữa tín hiệu vào và đáp ứng xung Tích 2 DFT <=> tích chập vòng trong miền thời gian.

  → dùng DFT để tính đáp ứng ngõ ra của hệ thống LTI ?????

- Xét bộ lọc FIR có đáp ứng xung h(n), chiều dài M.

  Tín hiệu ngõ vào x(n), chiều dài L.

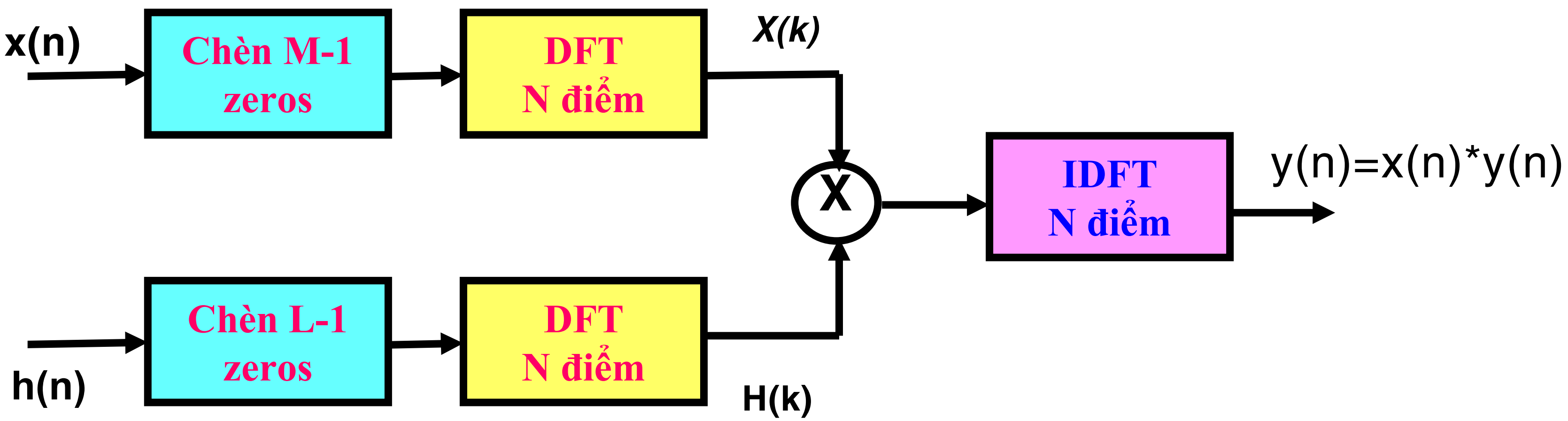
Khi đó, tín hiệu ngõ ra y(n) có chiều dài L+M-1.



- Số mẫu cần để biểu diễn phổ Y(Ω) là: N≥L+ M – 1 → cần lấy DFT N điểm.
- Lấy DFT N điểm cho 2 chuỗi x(n) và h(n).

7.1.3 Lọc tuyến tính dựa vào DFT (tt):

- Sơ đồ thực hiện:
  - Chèn zeros vào 2 chuỗi x(n) và h(n) để có chiều dài N.



- Bằng cách tăng chiều dài từng chuỗi (thêm zeros), tích chập vòng sẽ cho kết quả tương tự tích chập tuyến tính, hay nói cách khác, DFT có thể được dùng để lọc tuyến tính (tính đáp ứng ngõ ra của hệ thống tuyến tính).
- Trường hợp, tín hiệu ngõ vào dài, dùng phương pháp cộng chồng lấp. Việc tính toán cho từng khối sẽ thực hiện như trên.

7.1.4 Phân tích phổ tín hiệu dùng DFT:

- *Xét chuỗi tín hiệu cần phân tích x(n),* -∞ ≤ n ≤ ∞.
- *Quan sát tín hiệu trong L mẫu, nghĩa là* 0 ≤ n ≤ L-1.Tín hiệu quan sát lúc đó:

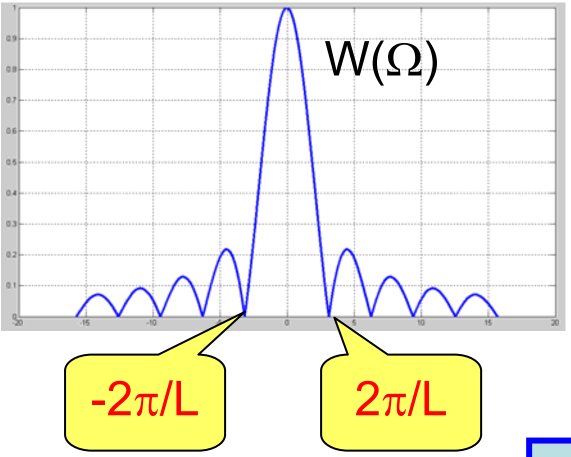
$$xx(n) = x(n)w(n), \quad w(n) = \begin{cases} 1 & ,0 \le n \le L-1 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

❖ ***Hiện tượng rò phổ:***

- *Giả sử x(n) = cos Ω_0n,* -∞ ≤ n ≤ ∞. Lúc đó, *xx(n) = cos Ω_0n, 0* ≤ n ≤ L-1.
  - Phổ của tín hiệu (biểu thức giải tích) dùng DTFT:

$$X(\Omega) = \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0)$$

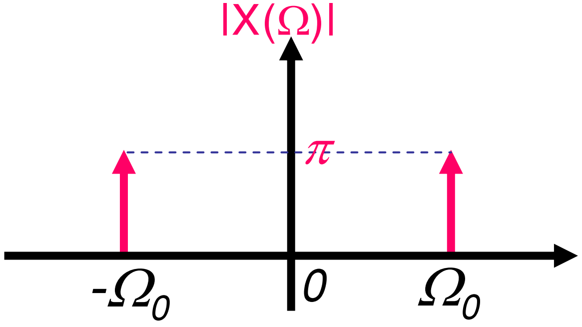
$$XX(\Omega) = \frac{1}{2}\left[W(\Omega - \Omega_0) + W(\Omega + \Omega_0)\right]$$

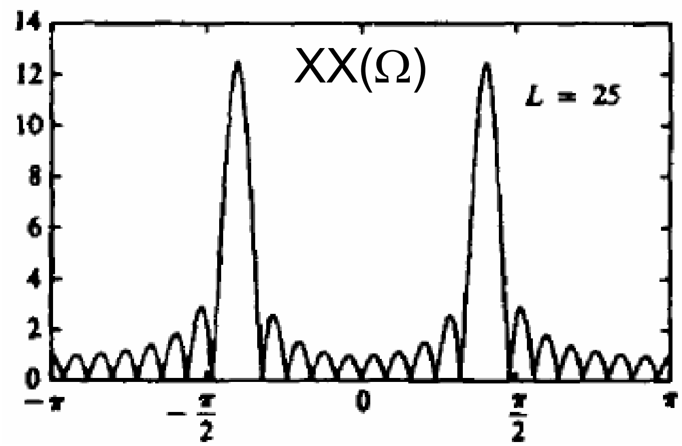


trong đó, W(Ω) là biến đổi DTFT của hàm cửa sổ w(n).

$$W(\Omega) = \frac{\sin \Omega L/2}{\sin \Omega/2} e^{-j\Omega(L-1)/2}$$

7.1.4 Phân tích phổ tín hiệu dùng DFT (tt):





- Phổ của tín hiệu dùng DFT: dán thêm N-L zeros vào x(n) rồi lấy DFT N điểm→ phổ XX(k).

❖ Nhận xét:

➢ Phổ XX(Ω) không nằm tại một vị trí như X(Ω) mà bị trải ra trong miền tần số do đặc tính của cửa số w(n)→ hiện tượng rò phổ.

➢ Như vậy, việc cửa sồ hóa (cắt cụt tín hiệu) sẽ làm sai lệch kết quả ước lượng phổ.

Chương 7 BIẾN ĐỔI DFT VÀ GIẢI THUẬT FFT (tt)

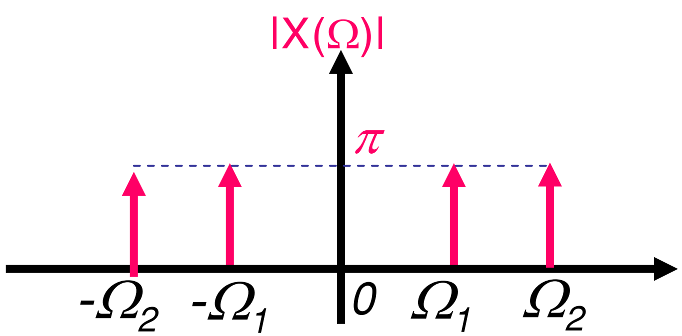
❖ ***Độ phân giải tần số:***

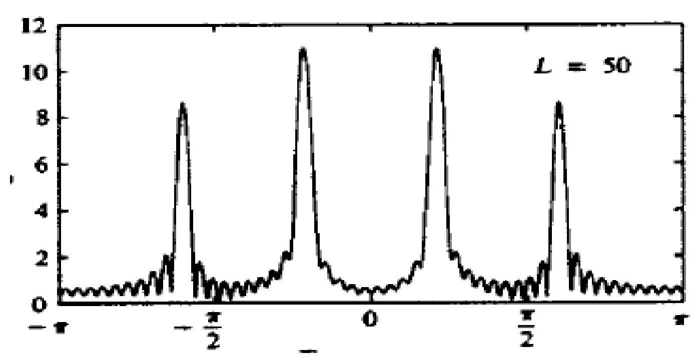
➢ *Xét tín hiệu gồm 2 thành phần tần số:* x(n) = cos Ω_1n + cos Ω_2n, $-\infty \le n \le \infty$. Lúc đó, *xx(n) = x(n)w(n)* = cos Ω_1n + cos Ω_2n, *0* $\le n \le L-1$.

➢ *Phổ của tín hiệu (biểu thức giải tích) dùng DTFT:*

$$X(\Omega) = \pi\delta(\Omega-\Omega_1) + \pi\delta(\Omega+\Omega_1) + \pi\delta(\Omega-\Omega_2) + \pi\delta(\Omega+\Omega_2)$$

$$XX(\Omega) = \frac{1}{2}\left[W(\Omega-\Omega_1) + W(\Omega+\Omega_1) + W(\Omega-\Omega_2) + W(\Omega+\Omega_2)\right]$$

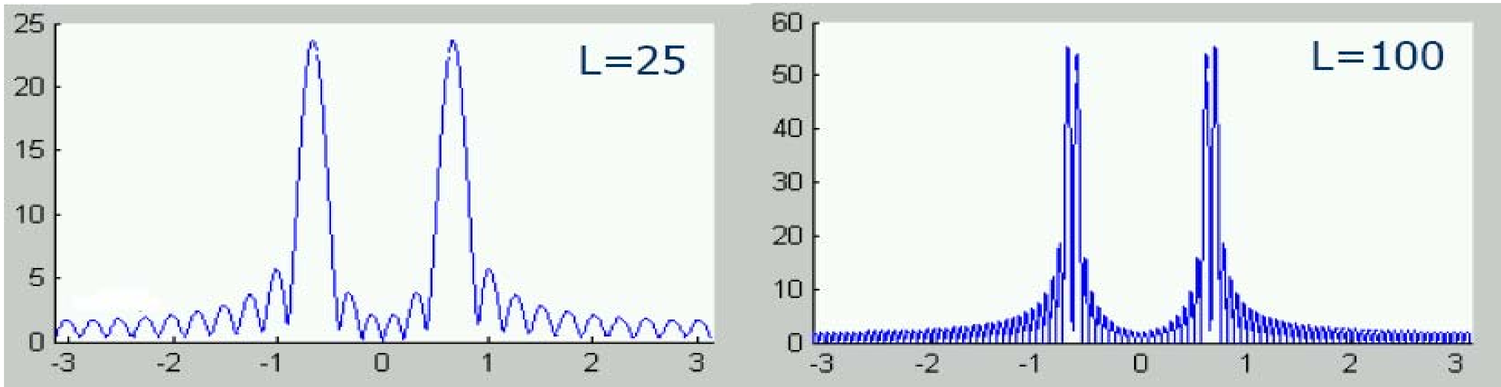




➢ *Nếu:* $|\Omega_1 - \Omega_2| < \frac{2\pi}{L}$: *W(Ω - Ω₁) và W(Ω - Ω₂) sẽ chồng lấn lên nhau → không phân biệt được 2 vạch phổ*

➢ *Nếu:* $|\Omega_1 - \Omega_2| \ge \frac{2\pi}{L}$: *W(Ω - Ω₁) và W(Ω - Ω₂) được hiển thị tách biệt nhau → phân biệt được 2 vạch phổ*

- *Giá trị :* $\boxed{\Delta\Omega = \frac{2\pi}{L}}$ *được gọi là độ phân giải phổ. Như vậy, hàm của sổ có chiều dài L chỉ phân biệt được các thành phần tần số cách nhau một đoạn ít nhất là:* $\Delta\Omega = \frac{2\pi}{L}$.
- *Phổ tín hiệu dùng DFT:* ($\Omega_1 = 0.2\pi$; $\Omega_2 = 0.22\pi$)



- Ảnh hưởng của đặc tính cửa sổ:
  - Độ cao búp phụ: ảnh hưởng đến mức rò phổ. Muốn giảm rò phổ, chọn loại của sổ có búp phụ thấp.
  - Độ rộng búp chính: ảnh hưởng đến độ phân giải. Muốn tăng độ phân giải, chọn loại của sổ có độ rộng búp chính hẹp.

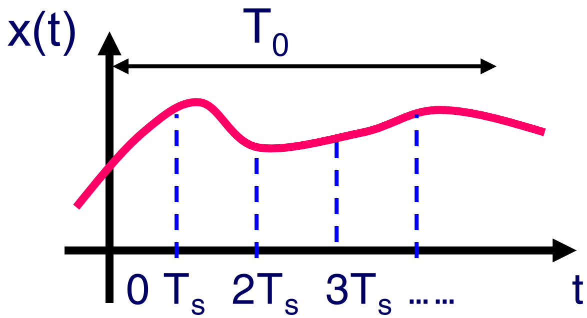
Chương 7 — BIẾN ĐỔI DFT VÀ GIẢI THUẬT FFT (tt)

Quan hệ giữa tần số tương tự và tần số số:

Các biểu thức liên quan đến quá trình lấy mẫu:

Tín hiệu tương tự x(t) được lấy mẫu ở tốc độ f_s trong khoảng thời gian T_0. và số mẫu thu được là N. Lúc đó:

$$T_0 = N \times T_S = \frac{N}{f_S} \qquad f_S = \frac{1}{T_S} \qquad N = T_0 f_S$$



Quan hệ tần số:

- Xét tín hiệu tương tự: x(t) = Acos ωt = Acos 2πft
- Lấy mẫu tín hiệu này: $x(nT_s)$= Acos ωnT_s = Acos $\omega n/T_s$
- Dạng tín hiệu rời rạc: x(n) = AcosΩn = Acos2πFn
- Đồng nhất hai biểu thức, ta được: $\Omega = \omega T_S$ hay: $\Omega = \dfrac{\omega}{f_S}$

Tần số tương tự (rad/s)

Tần số số (rad/mẫu)

7.1.4 Phân tích phổ tín hiệu dùng DFT (tt):

Ví dụ 3: *Cho tín hiệu sau:* x(t) = sin2πt + sin3πt + sin5πt + sin5.5πt (t:ms)

Tín hiệu này được lấy mẫu ở tốc độ f_s = 10Khz. Để việc phân tích phổ dùng DFT cho 4 đỉnh tách biệt thì thời gian lấy mẫu là bao lâu T_0?

Lời giải:

- Các thành phần tần số: f_1 =1 Khz; f_2 =1.5 Khz; f_3 =2.5 Khz; f_4 =2.75 Khz.
- Khoảng cách tần số nhỏ nhất cần được phân biệt:

$$\Delta f = 2.75 - 2.5 = 0.25 \text{ Khz}$$

- Số mẫu tối thiểu cần phải lấy:

$$N \geq \frac{f_S}{\Delta f} = \frac{10Khz}{0.25Khz} = 40$$

- Thời gian lấy mẫu:

$$T_0 = N \times T_S = \frac{N}{f_S} = \frac{40}{10000} = 4 \ \ (ms)$$

$$\Delta\Omega \geq \frac{2\pi}{N}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{f_s}$$

$$\Rightarrow N \geq \frac{f_s}{\Delta f}$$

7.1.4 Phân tích phổ tín hiệu dùng DFT (tt):

Ví dụ 4: *Cho tín hiệu sau:* $x(t) = \sin 2\pi t + \sin 4\pi t + \sin 2\pi f_3 t$; $1Khz \le f_3 \le 3Khz$ (t:ms)

Tín hiệu này được lấy mẫu ở tốc độ f_s = 10Khz trong khoảng thời gian 20 ms. Tín hiệu sau đó được phân tích phổ dùng DFT. Xác định tầm giá trị của f_3 để kết quả cho 3 đỉnh tách biệt?

Lời giải:

- Các thành phần tần số: f_1 =1 Khz; f_2 =2 Khz; f_3 Khz
- Số mẫu dữ liệu thu được:

$$N = f_S \times T_0 = 10 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-3} = 200$$

- Khoảng cách tần số nhỏ nhất có thể phân biệt được:

$$\Delta f = \frac{f_S}{N} = \frac{10Khz}{200} = 0.05Khz$$

- Tầm giá trị của f_3:

$$f_3 \in [f_1 + \Delta f; f_2 - \Delta f] = [1 + 0.05; 2 - 0.05] = [1.05Khz; 1.95Khz]$$

7.2 Giải thuật biến đổi Fourier nhanh FFT (Fast Fourier Transform)

- *FFT là thuật toán cho phép tính DFT một cách hiệu quả (giảm độ phức tạp/ thời gian tính toán).*

7.2.1 FFT cơ số 2 phân chia theo thời gian:

- *Giả sử tín hiệu x(n) có chiều dài N = 2^v.*
- *Chia x(n) thành hai chuỗi con: g(n) = x(2n): gồm các mẫu ở vị trí chẵn*

  h(n) = x(2n+1): gồm các mẫu ở vị trí lẻ
- *Lấy DFT N điểm:*

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{\substack{n=0;\\ n=2l}}^{N-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{\substack{n=0\\ n=2l+1}}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$= \sum_{l=0}^{N/2-1} g(l) W_N^{2kl} + \sum_{l=0}^{N/2-1} h(l) W_N^{(2l+1)k}$$

$$= \sum_{l=0}^{N/2-1} g(l) W_{N/2}^{kl} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} h(l) W_{N/2}^{lk} = G(k) + W_N^k H(k)$$

7.2.1 FFT cơ số 2 phân chia theo thời gian (tt):

Trong đó: *G(k): biến đổi DFT N/2 điểm của chuỗi g(l)*

H(k): biến đổi DFT N/2 điểm của chuỗi h(l)

→ *Như vậy, X(k) có thể được tính từ các DFT N/2 điểm G(k) và H(k). Cụ thể là:*

$X(0) = G(0) + W_8^0 H(0);$

$X(1) = G(1) + W_8^1 H(1);$

……..

$X(4) = G(0) + W_8^4 H(0) = G(0) - W_8^0 H(0);$

$X(5) = G(1) + W_8^5 H(1) = G(1) - W_8^1 H(1);$

………..

$$W_N^{k+N} = W_N^k$$

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

G(k) và H(k): N/2 điểm

Tính X(k) đòi hỏi N điểm

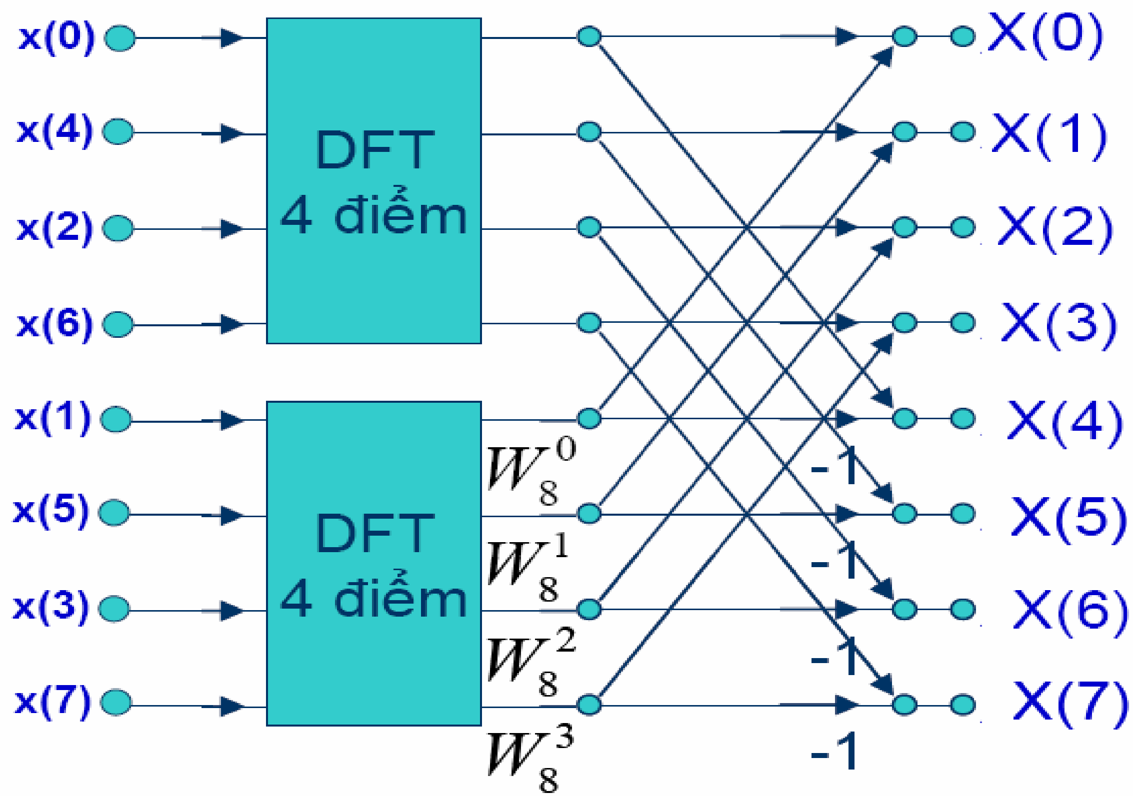
→Dùng tính chất tuần hoàn:

G(k+N/2) = G(k)

H(k+N/2) = H(k)

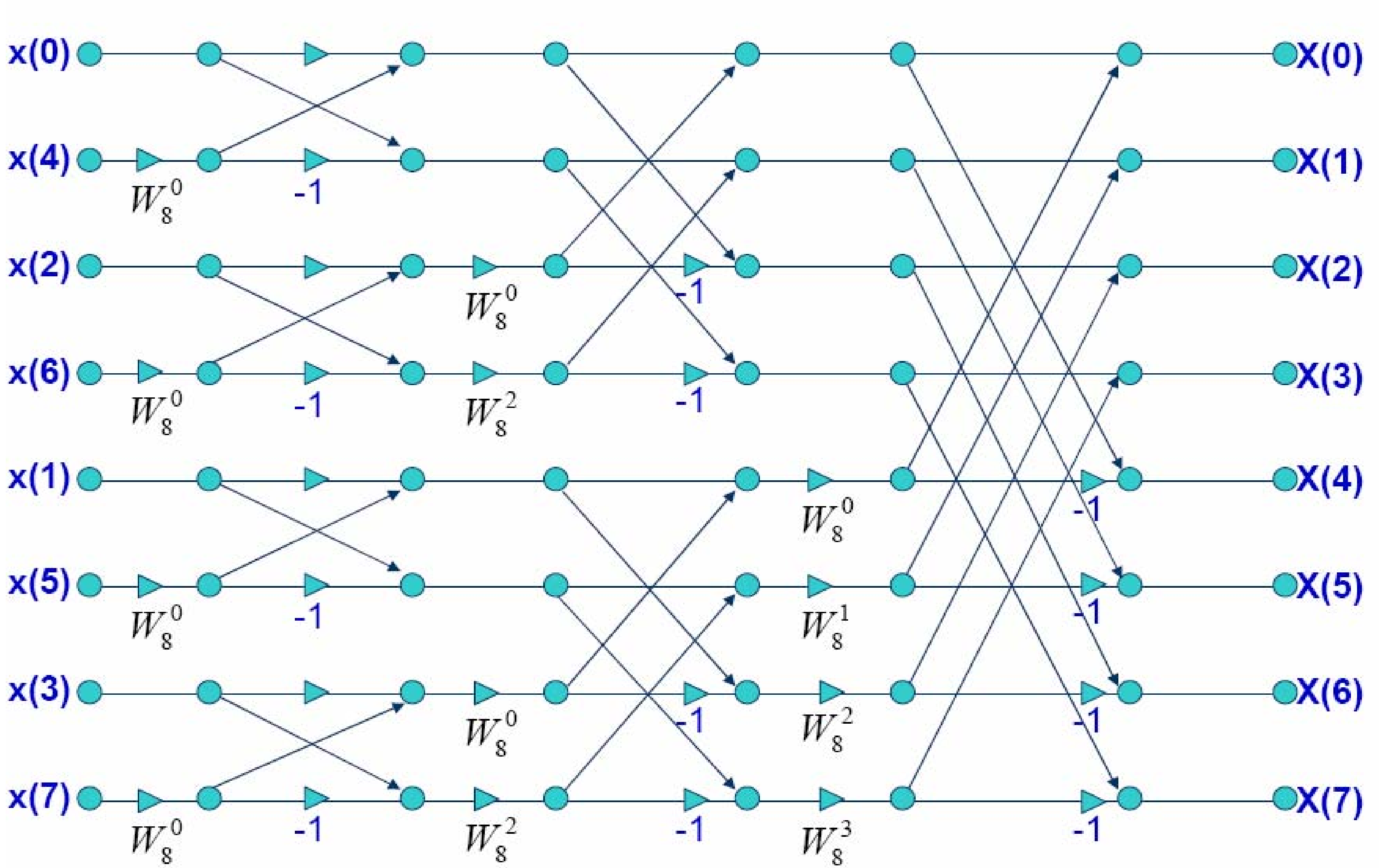
7.2.1 FFT cơ số 2 phân chia theo thời gian (tt):

➢ *Sơ đồ thực hiện (N = 8)*



➢ *Tiếp tục thực hiện cho g(l) và h(l) như x(n) cho đến khi chỉ còn tính DFT 2 điểm → cần $\log_2 N$ lần chia.*

❖ *Sơ đồ FFT 8 điểm phân chia theo thời gian:*



Chương 7 BIẾN ĐỔI DFT VÀ GIẢI THUẬT FFT (tt)

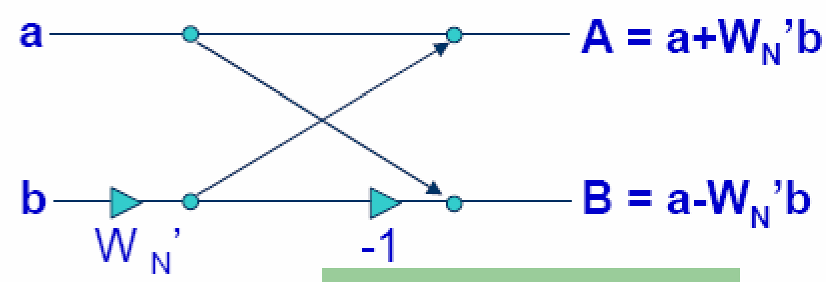
❖ *Khối thực hiện cơ bản:*

$$W_8^0 = e^{-j2\pi 0/8} = 1$$

$$W_8^1 = e^{-j2\pi 1/8} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$W_8^2 = e^{-j2\pi 2/8} = -j$$

$$W_8^3 = e^{-j2\pi 3/8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Độ phức tạp
- 1 nhân phức
- 2 cộng phức

❖ Nhận xét:

➢ Việc tính toán DFT N điểm dùng giải thuật FFT cơ số 2 cần có:

- $\log_2 N$: tầng tính toán
- Mỗi tầng yêu cầu: N/2: phép nhân phức và N: phép cộng phức.

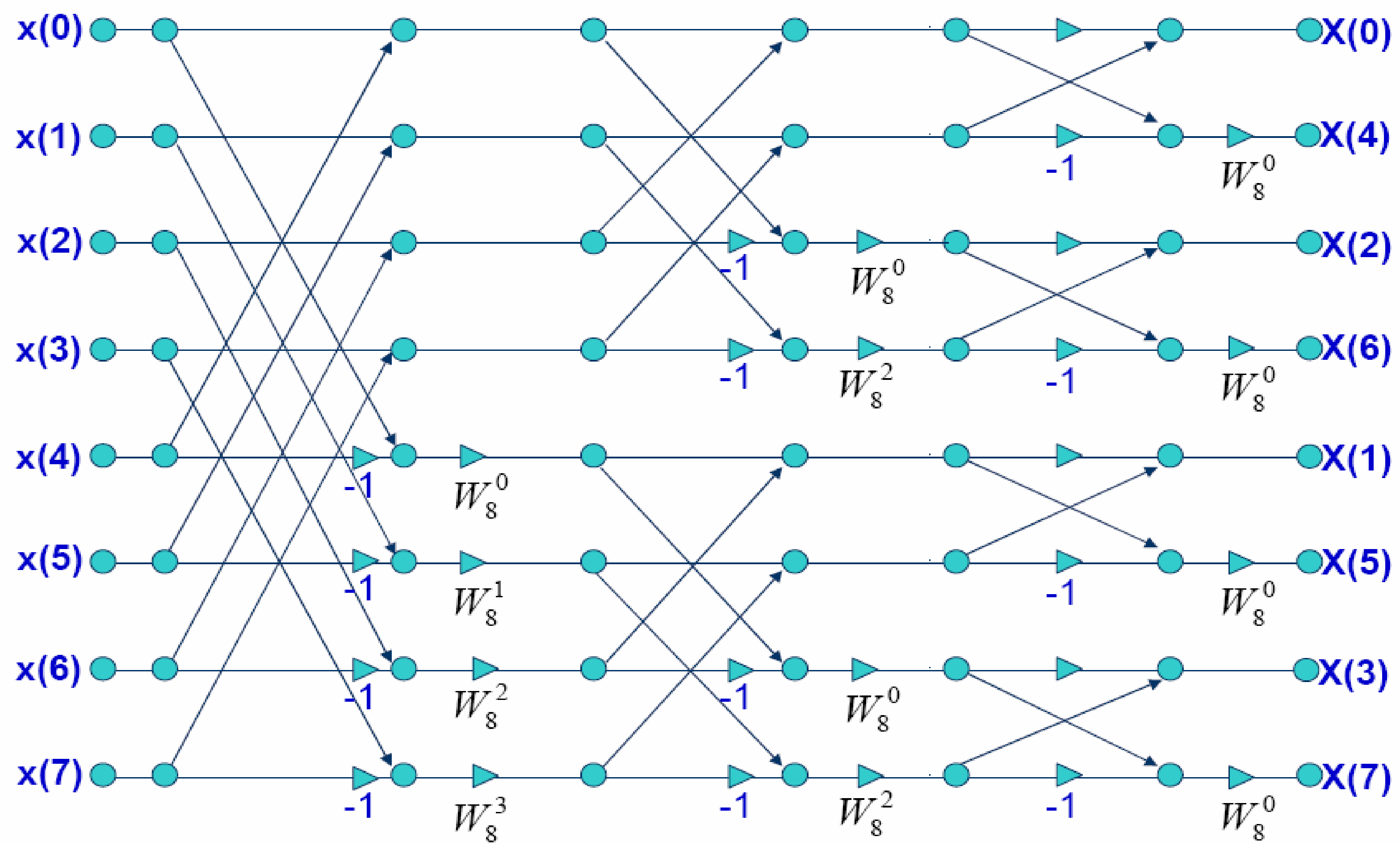
→ Việc tính toán DFT N điểm dùng giải thuật FFT cần có:

- $(N/2)\log_2 N$: phép nhân phức (>< N2: phép nhân phức)
- $N\log_2 N$: phép cộng phức (>< N(N-1): phép cộng phức)

Chương 7 BIẾN ĐỔI DFT VÀ GIẢI THUẬT FFT (tt)

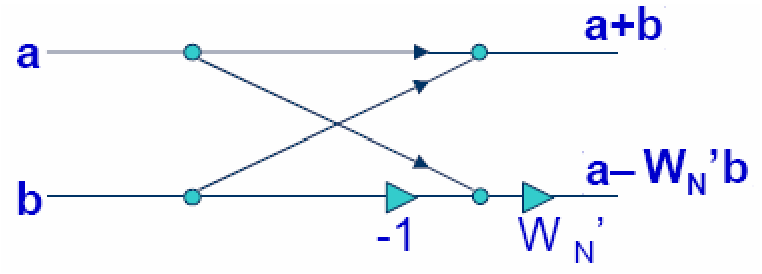
7.2.2 FFT cơ số 2 phân chia theo tần số: *(chứng minh tương tự)*

❖ *Sơ đồ giải thuật FFT 8 điểm phân chia theo tần số*



7.2.2 FFT cơ số 2 phân chia theo tần số:

❖ *Khối thực hiện cơ bản:*



❖ *Nhận xét:*

➢ *Số lượng phép nhân phức và phép cộng phức giống như FFT phân chia theo thời gian.*

➢ *Sự khác nhau cơ bản giữa hai giải thuật là ở thứ tự sắp xếp dữ liệu ngõ vào, ngõ ra.*

❑ ***Tính IDFT dùng giải thuật FFT:***

$$x(n) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W_N^{kn}\right]^* = \frac{1}{N}\left[DFT(X^*(k))\right]^*$$

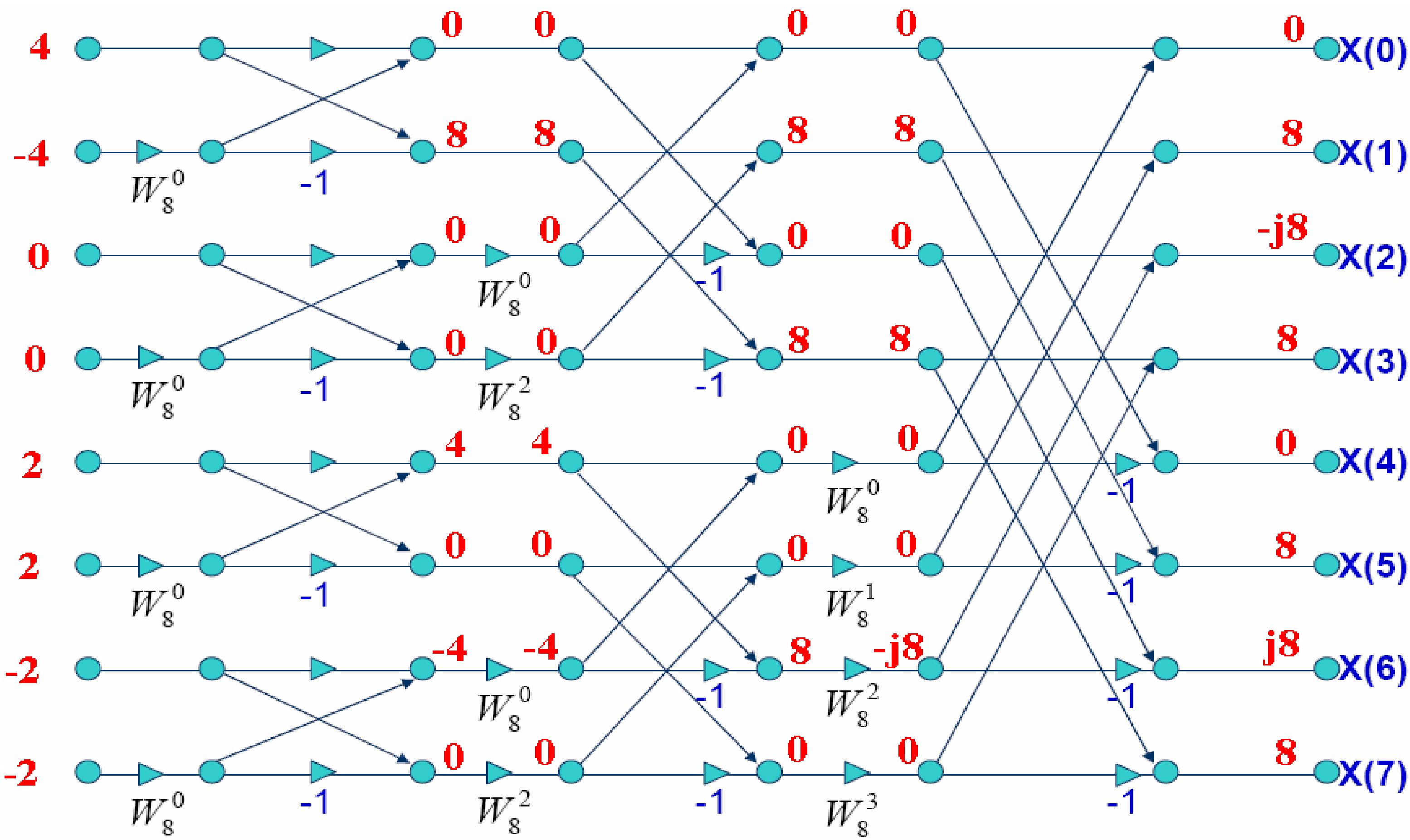
hay:

$$x(n) = \frac{1}{N}\left[FFT(X^*(k))\right]^*$$

Ví dụ 5: *Cho tín hiệu:* x(n)={4, 2, 0, -2, -4, 2, 0, -2}

a. Tìm phổ X(k) dùng giải thuật FFT 8 điểm phân chia theo thời gian

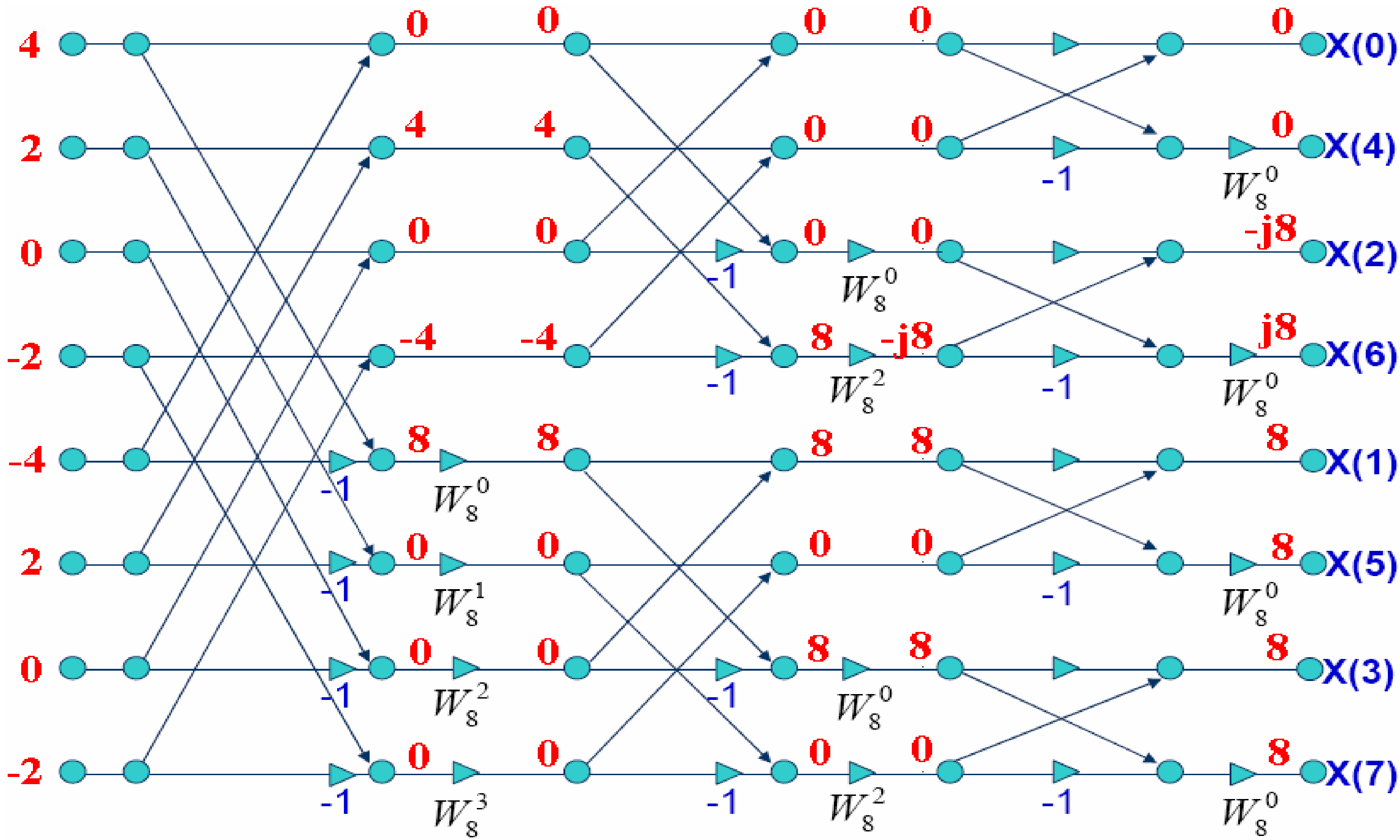
Lời giải: X(k) = {0, 8, -j8, 8, 0, 8, j8, 8}



Ví dụ 5: *Cho tín hiệu:* x(n)={4, 2, 0, -2, -4, 2, 0, -2}

b. Tìm phổ X(k) dùng giải thuật FFT 8 điểm phân chia theo tần số

Lời giải: X(k) = {0, 8, -j8, 8, 0, 8, j8, 8}



Bài tập:

7.1 (bài 11.1.4 trang 501)
7.2 (bài 11.1.7 trang 502)
7.3 (bài 11.1.20 trang 503)
7.4 (bài 11.1.22 trang 504)