Chương 6

XỬ LÝ TÍN HIỆU MIỀN TẦN SỐ

Nội dung:

6.1 Chuỗi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn:

❖ Giả sử x(n) là tín hiệu rời rạc tuần hoàn có chu kỳ N, nghĩa là:

$$x(n) = x(n+N), \forall n$$

→ Công thức khai triển Fourier (chuỗi Fourier):

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

trong đó, các hệ số Fourier c_k được xác định như sau:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

❖ Nhận xét:

- x(n) được biểu diễn trong miền tần số bởi các hệ số $\{c_k\}$
- Các hệ số $\{c_k\}$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N.

❖ Mật độ phổ công suất

➢ Công suất trung bình của tín hiệu rời rạc tuần hoàn:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2$$

→ biểu diễn P_x theo các hệ số c_k ???

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\sum_{k=0}^{N-1}c_k^* e^{-j2\pi kn/N}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}c_k^*\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi kn/N}\right] = \sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2$$

Suy ra:

$$\boxed{P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2}$$

➢ Chuỗi $|c_k|^2$: biểu diễn phân bố công suất theo tần số → đồ thị biểu diễn $\{|c_k|^2\}$: mật độ phổ công suất của tín hiệu rời rạc tuần hoàn.

6.1 Chuỗi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn:

Ví dụ 1: Cho tín hiệu x(n) = {1,1,0,0} tuần hoàn với chu kỳ N = 7.

Hãy xác định và vẽ phổ; mật độ phổ công suất.

Lời giải:

- Tín hiệu x(n) được biểu diễn trong miền tần số bởi các hệ số $\{c_k\}$:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n)e^{-j2\pi kn/4}; \quad k = 0,1,2,3$$

$$* \quad k = 0 : c_0 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n) = \frac{1}{4}(1+1+0+0) = \frac{1}{2}$$

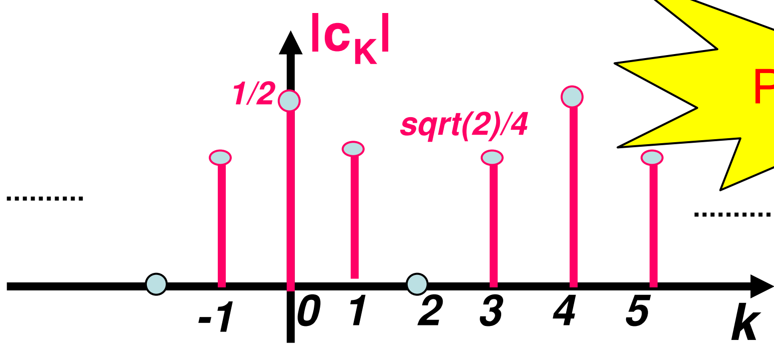
$$* \quad k = 1 : c_1 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n)e^{-j2\pi n/4} = \frac{1}{4}(1\times e^{0} + 1\times e^{-j\pi/2}) = \frac{1}{4}(1-j)$$

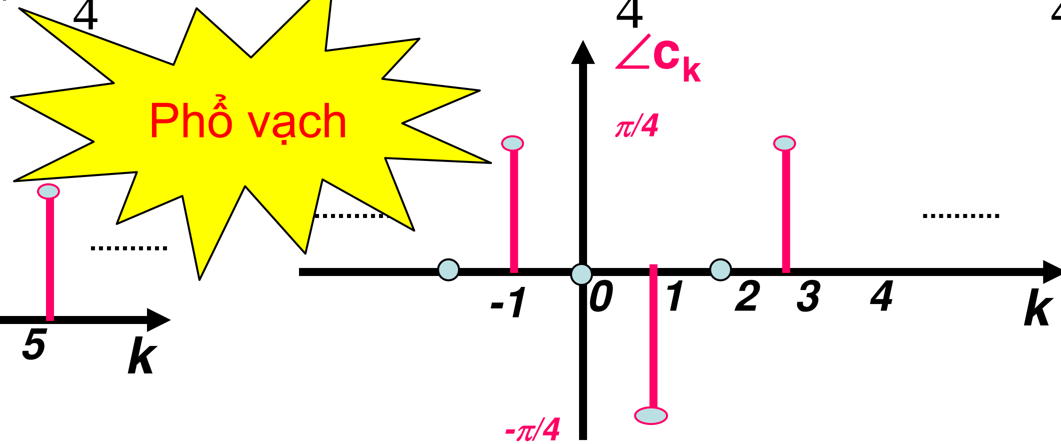
$$* \quad k = 2 : c_2 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n)e^{-j\pi n} = \frac{1}{4}(1\times e^{0} + 1\times e^{-j\pi}) = 0$$

$$* \quad k = 3 : c_3 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n)e^{-j3\pi n/2} = \frac{1}{4}(1\times e^{0} + 1\times e^{-j3\pi/2}) = \frac{1}{4}(1+j)$$

- Vẽ phổ biên độ và phổ pha:

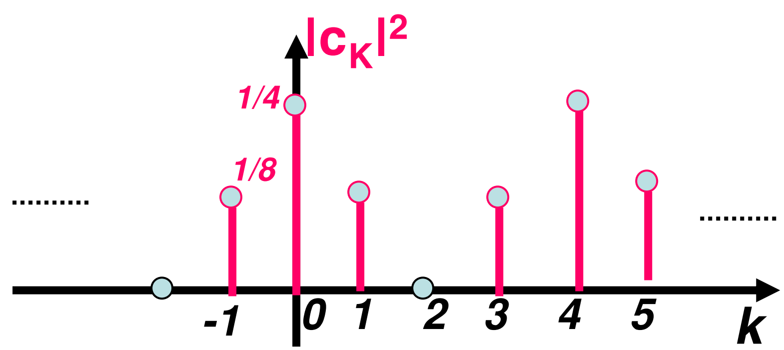
$$|c_0| = \frac{1}{2}; |c_1| = \frac{\sqrt{2}}{4}; |c_2| = 0; |c_3| = \frac{\sqrt{2}}{4}; \qquad \angle c_0 = 0; \angle c_1 = -\frac{\pi}{4}; \angle c_2 = 0; \angle c_3 = \frac{\pi}{4};$$





- Mật độ phổ công suất:

$$|c_0|^2 = \frac{1}{4}; |c_1|^2 = \frac{1}{8}; |c_2|^2 = 0; |c_3|^2 = \frac{1}{8};$$



- Công suất tín hiệu:

$$P_x = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

6.2 Biến đổi Fourier thời gian rời rạc DTFT (Discrete Time Fourier Transform)

➢ phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc không tuần hoàn

6.2.1 Định nghĩa:

❖ Giả sử x(n) là tín hiệu rời rạc không tuần hoàn. Cặp công thức biến đổi DTFT:

$$\boxed{X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}}$$

(biến đổi DTFT thuận)

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega}$$

(biến đổi DTFT ngược)

❖ Nhận xét:

➢ Phổ của tín hiệu rời rạc không tuần hoàn có dạng liên tục, dạng phức.

$$\boxed{X(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\angle X(\Omega)}}$$

Phổ pha

Phổ biên độ

❖ Nhận xét (tt):

➢ *X(Ω) tuần hoàn với chu kỳ 2π.*

➢ *Với x(n) thực: X*(Ω) = X(- Ω) , hay:*

$$\begin{cases} |X(\Omega)| = |X(\Omega)| \\ \angle X(\Omega) = -\angle X(-\Omega) \end{cases}$$

❖ Điều kiện tồn tại phép biến đổi Fourier:

➢ *X(Ω) tồn tại nếu vế phải của nó hội tụ, suy ra:*

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty}$$

➢ *Như vậy, x(n) phải là tín hiệu có năng lượng hữu hạn.*

Ví dụ 2: Cho tín hiệu x(n) =$(0.5)^n$u(n). Hãy xác định phổ X(Ω) ?

Lời giải:

➢ Xét điều kiện tồn tại của biến đổi Fourier:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n = \frac{1}{1-0.5} = 2 < \infty$$

→ tồn tại DTFT

➢ Phổ của tín hiệu:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}$$

Ví dụ 3: Cho tín hiệu $x(n) = a^n u(n)$, $|a|<1$.

Hãy vẽ các thành phần phổ thực / phổ ảo, phổ biên độ/ phổ pha của tín hiệu x(n)?

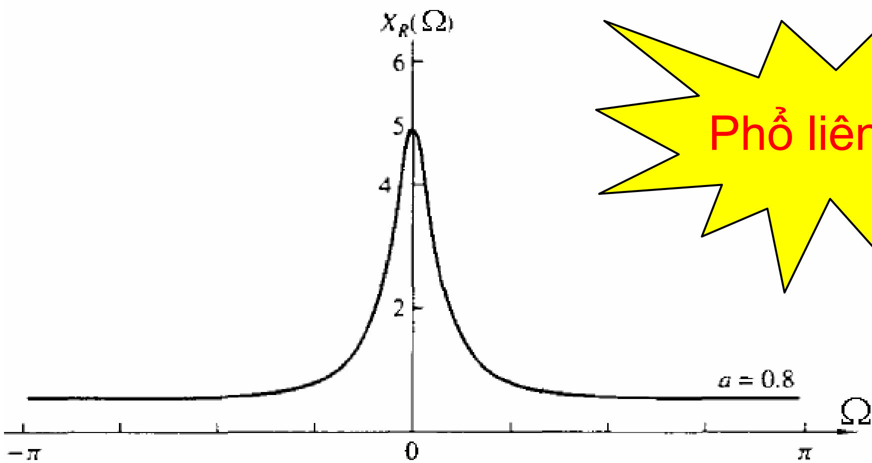
Lời giải:

- Phổ của tín hiệu: $$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$

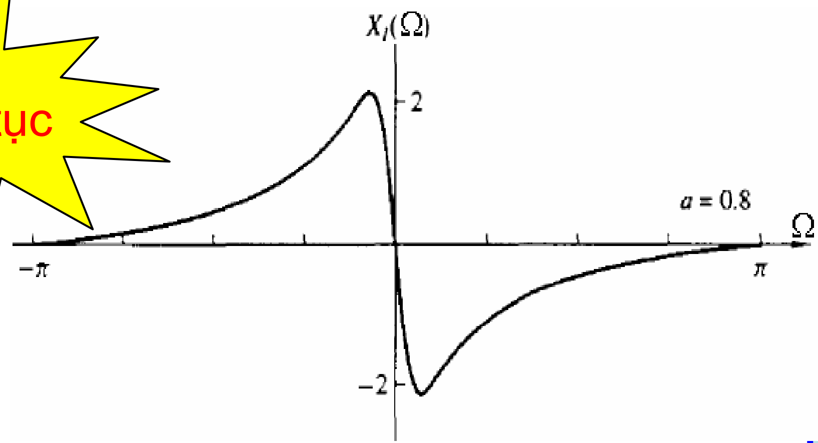
- Các thành phần phổ thực và phổ ảo:

$$X(\Omega) = \frac{1-ae^{j\Omega}}{(1-ae^{-j\Omega})(1-ae^{j\Omega})} = \frac{1-a\cos\Omega - ja\sin\Omega}{1-2a\cos\Omega + a^2}$$

$$\Rightarrow X_R(\Omega) = \frac{1-a\cos\Omega}{1-2a\cos\Omega+a^2}; \qquad X_I(\Omega) = \frac{-a\sin\Omega}{1-2a\cos\Omega+a^2}$$



Phổ liên tục



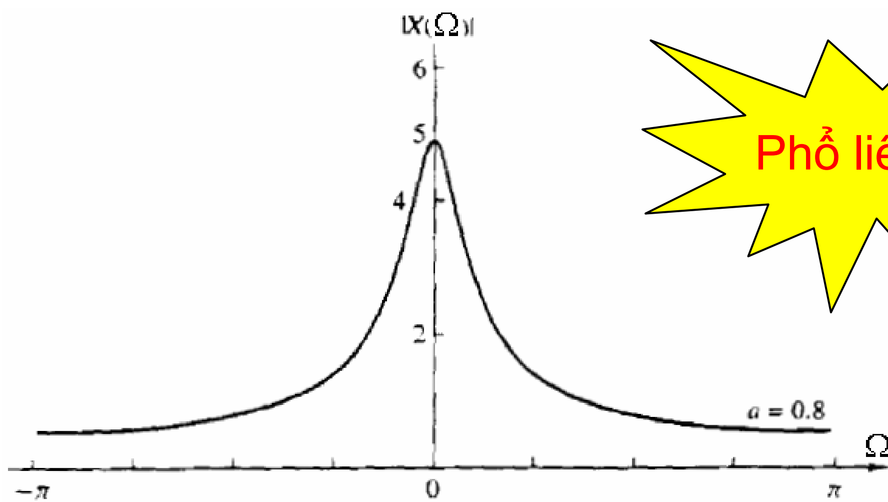
Lời giải (tt):

- Phổ của tín hiệu:

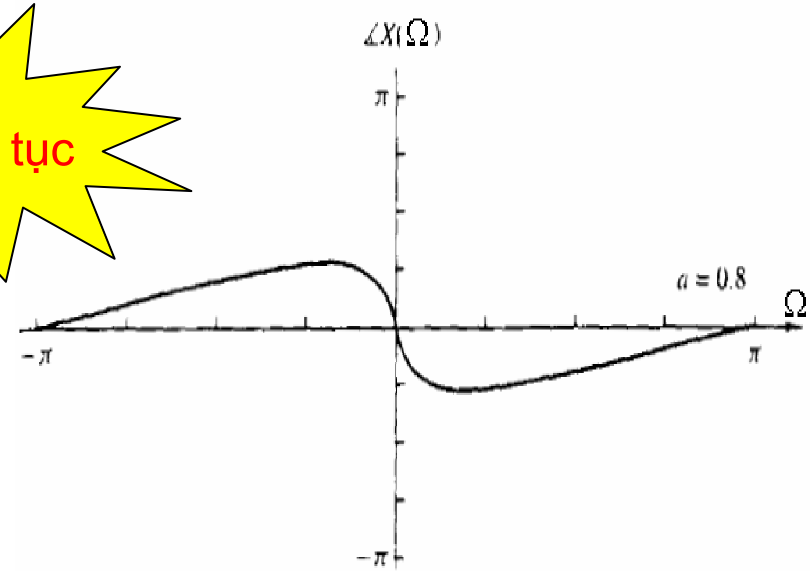
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$

- Các thành phần phổ biên độ và phổ pha:

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\Omega + a^2}}; \qquad \angle X(\Omega) = -arctg\frac{a\sin\Omega}{1-a\cos\Omega}$$

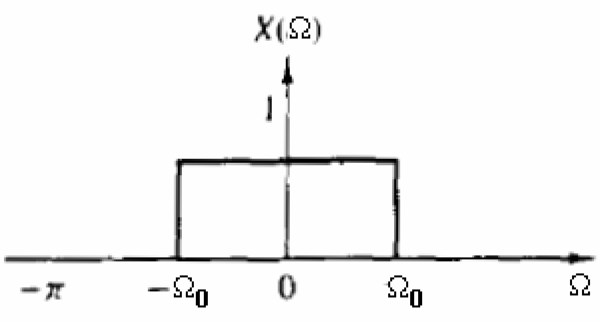


Phổ liên tục



Ví dụ 4: Xác định x(n), biết phổ của nó:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & ,|\Omega| < \Omega_0 \\ 0 & ,|\Omega| \geq \Omega_0 \end{cases}$$



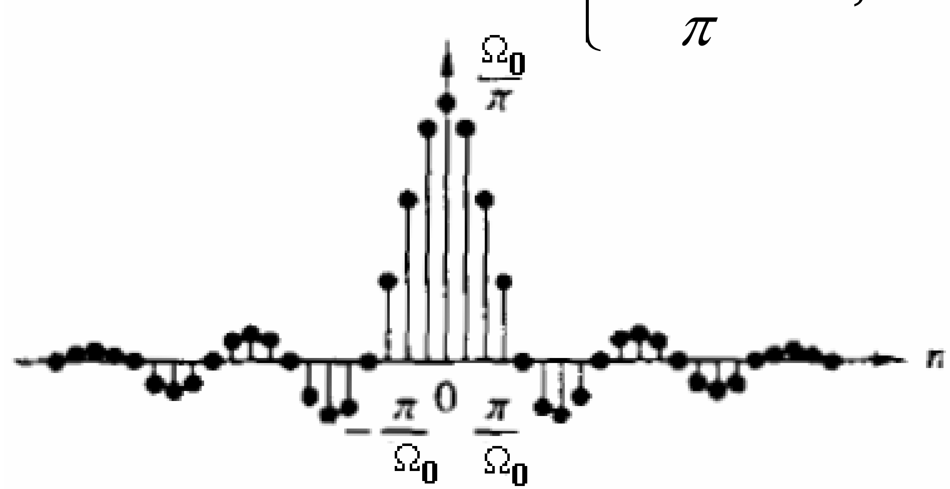
Lời giải:

➢ Áp dụng phép biến đổi DTFT ngược:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} e^{j\Omega n}d\Omega = \begin{cases} \dfrac{\sin\Omega_0 n}{n\pi} & ,n \neq 0 \\ \dfrac{\Omega_0}{\pi} & ,n = 0 \end{cases}$$

➢ Vậy tín hiệu rời rạc:

$$x(n) = \frac{\Omega_0}{\pi} Sa\Omega_0 n$$



XỬ LÝ TÍN HIỆU MIỀN TẦN SỐ (tt)

❖ Quan hệ về năng lượng (Định lý Parseval về năng lượng)

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 \, d\Omega$$

❖Một số cặp biến đổi DTFT thông dụng:

Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
$\delta(n)$	1
$\delta(n-n_0)$	$e^{-jn_0\Omega}$
1	$2\pi\delta(\Omega)$
$e^{jn\Omega_0}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$
$a^n u(n), \quad \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$-a^n u(-n-1), \quad \lvert a\rvert > 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$(n+1)a^n u(n), \quad \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$
$\cos n\Omega_0$	$\pi\delta(\Omega+\Omega_0)+\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$

6.2.2 Các tính chất của biến đổi DTFT:

Property	Time Domain	Frequency Domain
Notation	$x(n)$	$X(\Omega)$
	$x_1(n)$	$X_1(\Omega)$
	$x_2(n)$	$X_2(\Omega)$
Linearity	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\Omega) + a_2X_2(\Omega)$
Time shifting	$x(n-k)$	$e^{-j\Omega k}X(\Omega)$
Time reversal	$x(-n)$	$X(-\Omega)$
Convolution	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\Omega)X_2(\Omega)$
Frequency shifting	$e^{j\Omega_0 n}x(n)$	$X(\Omega-\Omega_0)$
Modulation	$x(n)\cos\Omega_0 n$	$\frac{1}{2}X(\Omega+\Omega_0) + \frac{1}{2}X(\Omega-\Omega_0)$
Multiplication	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\Omega-\lambda)d\lambda$
Differentiation in the frequency domain	$nx(n)$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Conjugation	$x^*(n)$	$X^*(-\Omega)$
Parseval's theorem	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\Omega)X_2^*(\Omega)d\Omega$	

Ví dụ 5: Cho các tín hiệu $x_1(n) = x_2(n) = \{1,\mathbf{1},1\}$. Tính $x(n) = x_1(n)*x_2(n)$?

Lời giải:

- Cách 1: (sử dụng bảng tích chập)
- Cách 2: (sử dụng tính chất biến đổi Fourier)
  - Xác định phổ của hai tín hiệu:

$$X_1(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega} + e^0 + e^{j\Omega} = 1 + 2\cos\Omega$$

$$X_2(\Omega) = X_1(\Omega)$$

  - Sử dụng tính chất tích chập:

$$X(\Omega) = X_1(\Omega)X_2(\Omega) = (1+2\cos\Omega)(1+2\cos\Omega)$$

$$= 1 + 4\cos\Omega + 4\cos^2\Omega = 3 + 4\cos\Omega + 2\cos 2\Omega$$

$$= 3 + 2(e^{-j\Omega} + e^{j\Omega}) + (e^{-j2\Omega} + e^{j2\Omega})$$

  - Mặc khác, biểu thức biến đổi DTFT: $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$
  - Đồng nhất hai biểu thức, suy ra:

$x(n) = \{1,2,\mathbf{3},2,1\}$

6.2.3 Mối quan hệ giữa biến đổi DTFT và biến đổi Z

- *Biểu thức hai phép biến đổi:*

$$\begin{cases} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \\ X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \end{cases}$$

- *Từ biểu thức biến đổi Z, nếu đặt z =* $re^{j\Omega}$ *(do z: biến phức). Lúc đó:*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n) r^{-n}] e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

→*X(z) được xem là biến đổi DTFT của chuỗi* $x(n).r^{-n}$.

- *Ngược lại, nếu X(z) hội tụ với |z| = 1, có thể biểu diễn: z =* $e^{j\Omega}$, do vậy:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

→ X(Ω) được xem như biến đổi Z của chuỗi xác định trên vòng tròn đơn vị.

6.2.3 Mối quan hệ giữa biến đổi DTFT và biến đổi Z

Ví dụ 6: Tìm biến đổi Z và biến đổi DTFT của chuỗi:

$$x(n) = (1/2)^n u(n)$$

Lời giải:

- *Biến đổi Z:*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

- *Biến đổi DTFT:*

Cách 1: (tính trực tiếp từ định nghĩa DTFT)

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

Cách 2: (dựa vào biến đổi Z). Vì ROC: |z|>1/2, chứa vòng tròn đơn vị:

$$X(\Omega) = X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

6.3 Biểu diễn miền tần số của hệ thống LTI

6.3.1 Định nghĩa đáp ứng tần số:

➢ Xét hệ thống LTI có đáp ứng xung h(n). Biến đổi DTFT của h(n), ký hiệu H(Ω), được gọi là đáp ứng tần số của hệ thống rời rạc.

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\Omega n}$$

➢ H(Ω) đặc trưng đầy đủ các tính chất của hệ thống trong miền tần số, và thường là một số phức:

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|\, e^{j\angle H(\Omega)}$$

Đáp ứng pha

Đáp ứng biên độ

➢ Khi biết đáp ứng tần số, dùng biến đổi DTFT ngược để tìm đáp ứng xung.

➢ Điều kiện tồn tại đáp ứng tần số:

H(Ω) tồn tại nếu: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$,nghĩa là: hệ thống phải ổn định

Ví dụ 7: Cho hệ thống LTI nhân quả được mô tả bởi phương trình I/O:

$$y(n) = 0.9y(n-1) + 0.1x(n)$$

Xác định đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống?

Lời giải:

➢ Xác định đáp ứng xung h(n):

$$h(n) = 0.9h(n-1) + 0.1\delta(n)$$

n = 0: $h(0) = 0.9h(-1) + 0.1\delta(0) = 0.1$

n = 1: $h(1) = 0.9h(0) + 0.1\delta(1) = 0.9*0.1$

n = 2: $h(2) = 0.9h(1) + 0.1\delta(2) = 0.9^2*0.1$;

……………

→ $h(n) = 0.1\,(0.9)^n \cdot u(n)$

➢ Nhận xét: hệ thống là ổn định, vì vậy tồn tại biến đổi DTFT.

Do đó, đáp ứng tần số:

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.1\times(0.9)^n e^{-j\Omega n}$$

$$= 0.1\frac{1}{1-0.9e^{-j\Omega}} = \frac{0.1}{1-0.9\cos\Omega + j0.9\sin\Omega}$$

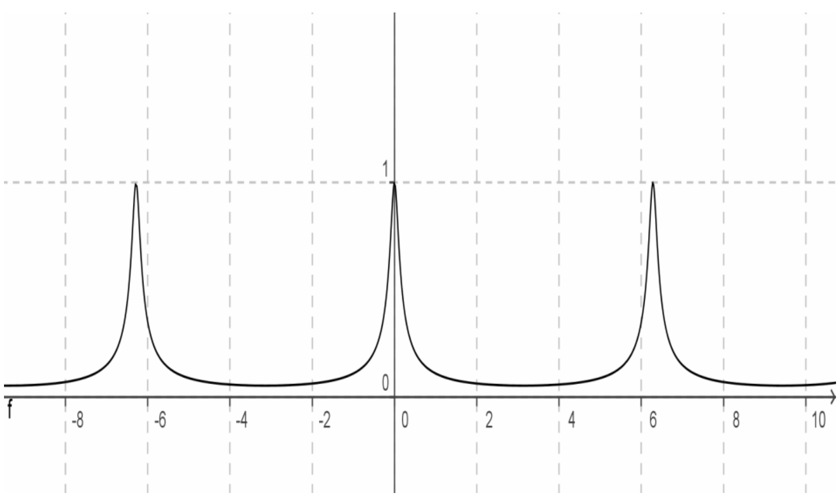
6.3.1 Định nghĩa đáp ứng tần số (tt):

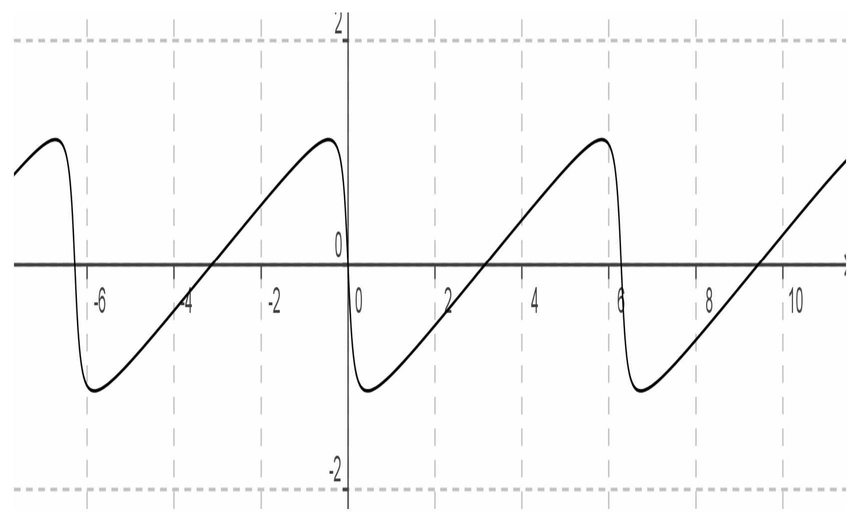
Ví dụ 7 (tt)

- *Xác định đáp ứng tần số và đáp ứng pha*

$$|H(\Omega)| = \frac{0.1}{\sqrt{1.81 - 1.8\cos\Omega}}; \qquad \angle H(\Omega) = -arctg\frac{0.9\sin\Omega}{1 - 0.9\cos\Omega}$$

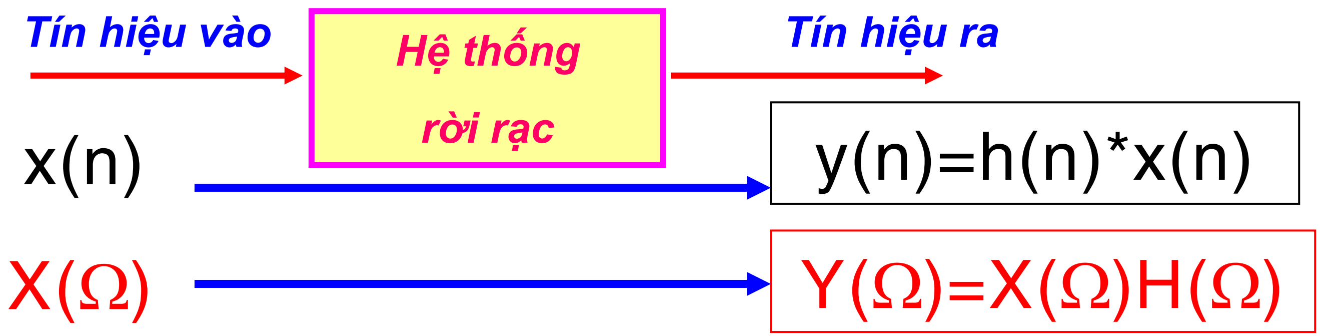
- *Vẽ đáp ứng tần số và đáp ứng pha:*



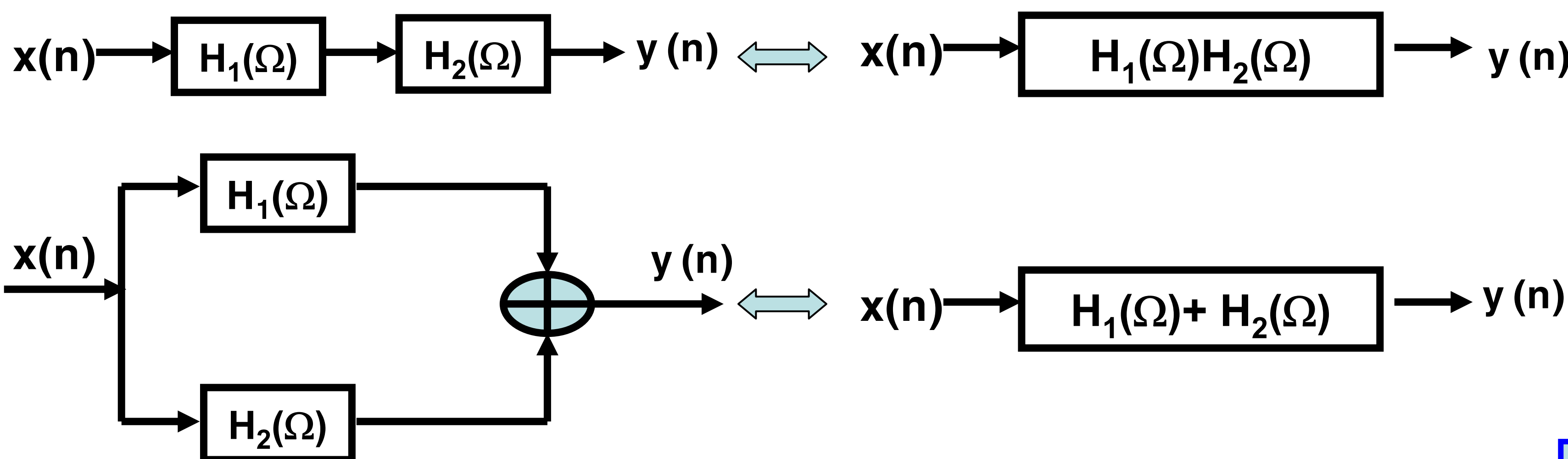


6.3.2 Quan hệ trong miền tần số

- Xét hệ thống LTI có đáp ứng xung h(n), đáp ứng tần số H(Ω):



- Đáp ứng tần số của các hệ thống ghép nối:



6.3.2 Quan hệ trong miền tần số

Ví dụ 8: Cho hệ thống LTI có đáp ứng xung: $h(n) = (1/2)^n u(n)$

a. Xác định tín hiệu ngõ ra khi tín hiệu ngõ vào: $x(n) = (1/4)^n u(n)$

Lời giải:

- *Phổ tín hiệu ngõ vào:*

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}/4}$$

- *Đáp ứng tần số của hệ thống:*

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}/2}$$

- *Phổ tín hiệu ngõ ra:*

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}/2} \times \frac{1}{1-e^{-j\Omega}/4}$$

- *Suy ra biểu thức tín hiệu miền thời gian:*

$$y(n) = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

b. Xác định tín hiệu ngõ ra khi tín hiệu ngõ vào:

x(n) = 5 + 12sinπn/2 - 20cos(πn + π/4)

Lời giải:

➢ *Đáp ứng tần số của hệ thống:*

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}/2} \Rightarrow \begin{cases} |H(\Omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1.25 - \cos\Omega}} \\ \angle H(\Omega) = -arctg\dfrac{0.5\sin\Omega}{1 - 0.5\cos\Omega} \end{cases}$$

➢ *Xác định ngõ ra với từng tần số ngõ vào:*

- *Các tần số ngõ vào: 0; π/2; π.*
- *Thay lần lượt vào biểu thức đáp ứng tần số và đáp ứng pha:*

❖ Chú ý:

Tín hiệu vào →	Hệ thống rời rạc $H(\Omega)$	Tín hiệu ra →
$x(n)=A\cos(\Omega_0\pi n+\varphi)$		$y(n)=A|H(\Omega_0)|\cos(\Omega_{0n}\pi+\varphi+\angle H(\Omega_0))$

Ví dụ 8 (tt)

- *Thay lần lượt vào biểu thức đáp ứng tần số và đáp ứng pha:*

$$* \ \Omega = 0: \qquad |H(0)| = \frac{1}{\sqrt{1.25-1}} = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$\angle H(0) = -arctg\,0 = 0$$

$$* \ \Omega = \pi/2: \qquad |H(\frac{\pi}{2})| = \frac{1}{\sqrt{1.25-0}} = \frac{1}{1.12} = 0.89$$

$$\angle H(\frac{\pi}{2}) = -arctg\,0.5 = -0.15\pi$$

$$* \ \Omega = \pi: \qquad |H(\pi)| = \frac{1}{\sqrt{1.25+1}} = \frac{1}{1.5} = 0.67$$

$$\angle H(\pi) = -arctg\,0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y(n) = 5|H(0)| + 12|H(\frac{\pi}{2})|\sin\left[\frac{\pi}{2}n + \angle H(\frac{\pi}{2})\right]$$

$$-20|H(\pi)|\sin\left[\pi n + \angle H(\pi)\right]$$

$$= 10 + 10.7\sin(\pi n/2 - 0.15\pi) - 13.4\cos\pi n$$

Bài tập:

6.1 (bài 6.1.1 trang 223)
6.2 (bài 6.1.6 trang 223)
6.3 (bài 6.2.1 trang 223)
6.4 (bài 6.3.1 trang 225)
6.5 (bài 6.3.3 trang 225)
6.6 (bài 6.3.4 trang 225)
6.7 (bài 6.3.7 trang 226)