



Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC

Nội dung:

3.1 Tín hiệu rời rạc

3.1.1 Các cách biểu diễn tín hiệu rời rạc

3.1.2 Một số tín hiệu rời rạc cơ bản

3.1.3 Phân loại tín hiệu rời rạc

3.1.4 Các phép xử lý trên tín hiệu rời rạc

3.2 Hệ thống rời rạc rời rạc

3.2.1 Mô tả hệ thống rời rạc

3.2.2 Phân loại hệ thống rời rạc

Bài tập



Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC

3.1 Tín hiệu rời rạc:

➤ $x(n)$: mẫu thứ n của tín hiệu x ; $-h < n < h$.

3.1.1 Các cách biểu diễn tín hiệu rời rạc:

➤ Dạng hàm:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

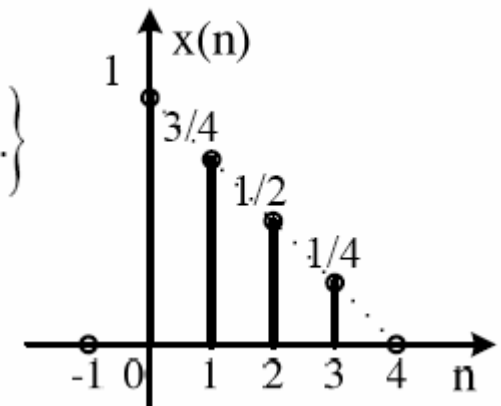
➤ Dạng bảng:

n	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x(n)$...	0	0	0	1	4	1	0	0

➤ Dạng chuỗi số:

$$x(n) = \left\{ \dots, x(n-1), x(n), x(n+1), \dots \right\}$$

➤ Dạng đồ thị:





Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

3.1 Tín hiệu rời rạc (tt):

3.1.2 Một số tín hiệu rời rạc cơ bản:

❖ Tín hiệu xung đơn vị:

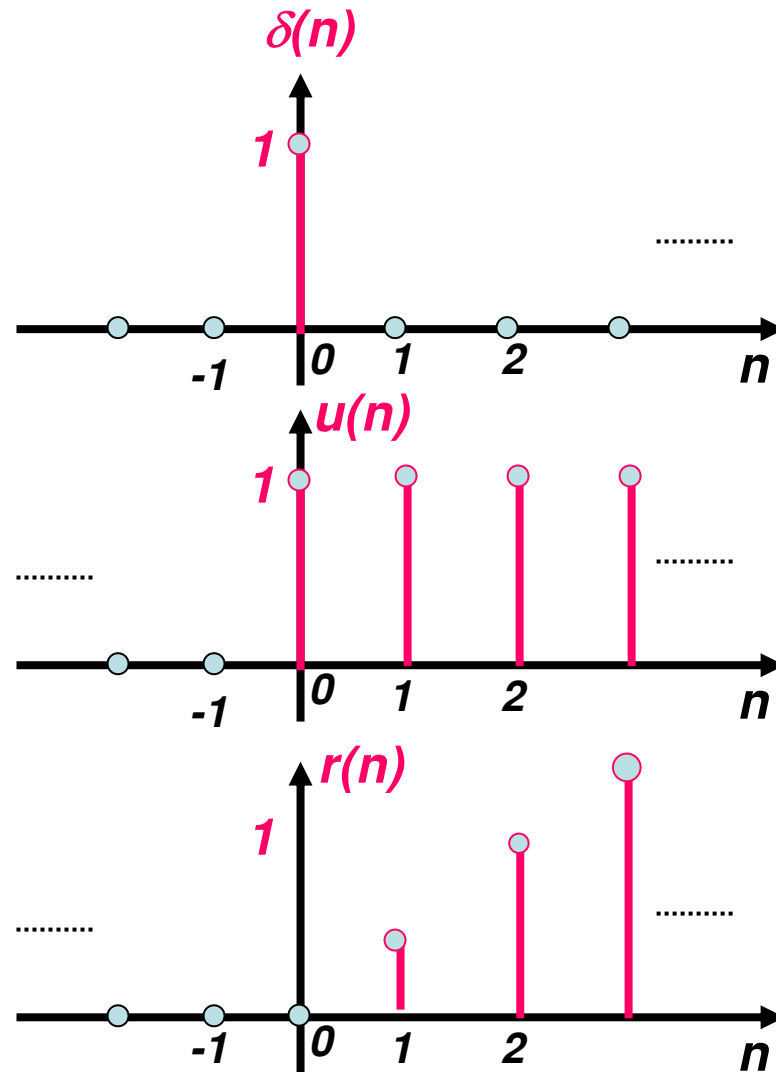
$$x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n \neq 0 \end{cases}$$

❖ Tín hiệu bước:

$$x(n) = u(n) = \begin{cases} 1; & n \geq 0 \\ 0; & n < 0 \end{cases}$$

❖ Tín hiệu dốc:

$$x(n) = r(n) = \begin{cases} n; & n \geq 0 \\ 0; & n < 0 \end{cases}$$





Chương 3

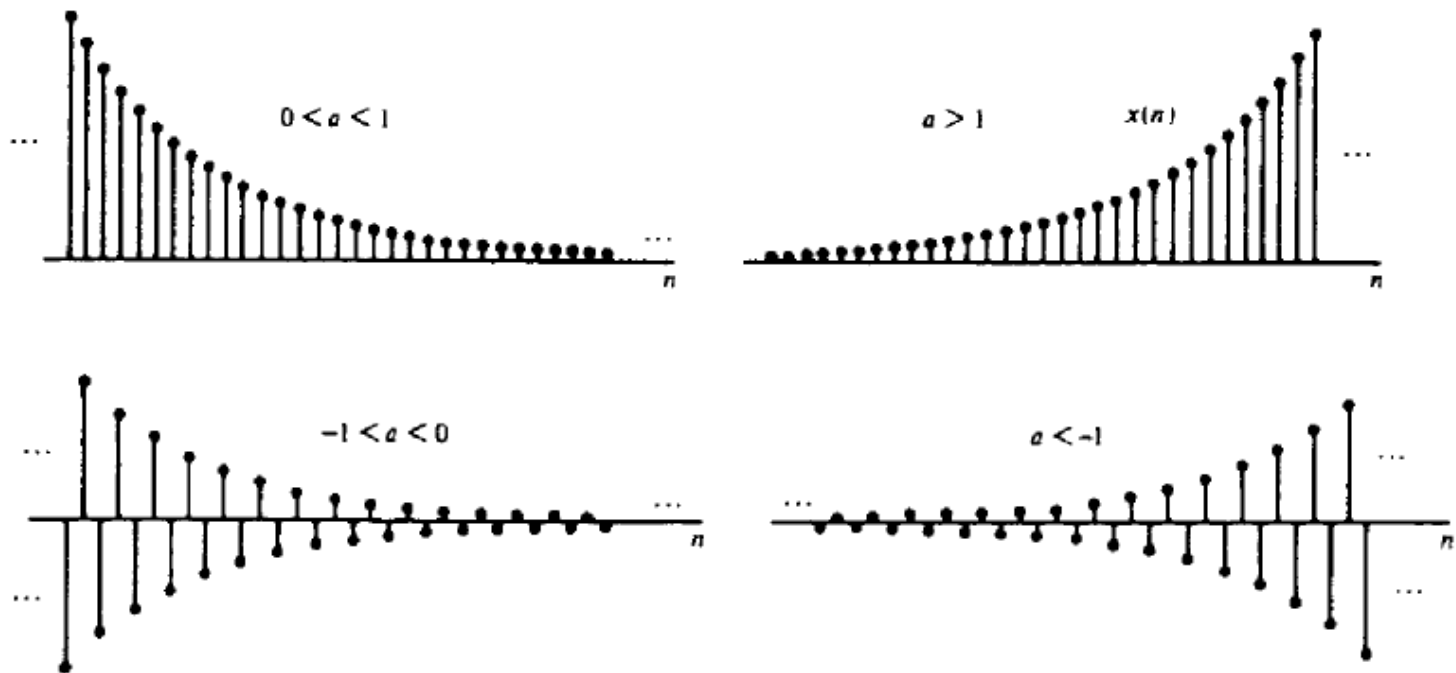
TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

3.1 Tín hiệu rời rạc (tt):

3.1.2 Một số tín hiệu rời rạc cơ bản (tt):

❖ *Tín hiệu hàm mũ thực:*

$$x(n] = a^n, \forall n$$





Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

3.1 Tín hiệu rời rạc (tt):

3.1.3 Phân loại tín hiệu rời rạc:

a. Tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất:

❖ Năng lượng của một tín hiệu:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

➤ Nếu $0 < E_x < \infty$: $x(t)$ là tín hiệu năng lượng

Ví dụ 1: Hãy cho biết tín hiệu sau có phải là tín hiệu năng lượng không?

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & ; n \geq 0 \\ 2^n & ; n < 0 \end{cases}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)|^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{35}{24} < \infty \rightarrow x(n): \text{tín hiệu năng lượng} \end{aligned}$$



Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

3.1.3 Phân loại tín hiệu rời rạc:

a. Tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất (tt):

❖ Công suất trung bình của một tín hiệu:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2$$

➤ Nếu $0 < P_x < \infty$: $x(t)$ là tín hiệu công suất

Ví dụ 2: Hãy cho biết tín hiệu sau có phải là tín hiệu công suất không?

$$x(n) = A e^{j\omega_0 n}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{+N} |A e^{j\omega_0 n}|^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{+N} |A|^2 = A^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N + 1}{2N + 1} = A^2 < \infty \end{aligned}$$

→ $x(n)$: tín hiệu công suất



Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

a. Tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất (tt):

□ Công suất và năng lượng của một số tín hiệu cơ bản:

Tín hiệu	E_x	P_x	Loại tín hiệu
$\delta(n)$	1	0	Năng lượng
$u(n)$	h	$\frac{1}{2}$	Công suất
$Ae^{j\omega n}$	h	A^2	Công suất

□ Một số công thức về chuỗi thường gặp:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1 - a^N}{1 - a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}; \quad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a^n = \frac{a}{(1 - a)^2}, \quad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2} N(N - 1)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6} N(N - 1)(2N - 1)$$



Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

3.1.3 Phân loại tín hiệu rời rạc (tt):

b. Tín hiệu tuần hoàn và tín hiệu không tuần hoàn:

❖ Tín hiệu $x(n)$ được gọi là tuần hoàn với chu kỳ N , nếu:

$$x(n) = x(n + N); \forall n$$

Tín hiệu $x(n)$
sẽ lặp lại sau
mỗi N mẫu

❖ Nếu không tồn tại số nguyên N thỏa mãn điều kiện trên thì $x(n)$ không phải là tín hiệu tuần hoàn.

Ví dụ 3: Hãy cho biết tín hiệu sau có phải là tín hiệu tuần hoàn không?

a. $x(n) = \cos(0.125\pi n)$

b. $x(n) = a^n u(n)$

Lời giải:

a. $x(n) = \cos(0.125\pi n) = \cos(\pi n / 8) = \cos(\pi n / 8 + 2\pi) = \cos(\pi(n + 16) / 8)$

→ $N = 16$: $x(n)$ tín hiệu tuần hoàn

b. $x(n)$ không phải là tín hiệu tuần hoàn

c. Tín hiệu chẵn và tín hiệu lẻ:

❖ Tín hiệu $x(n)$ được gọi là đối xứng (chẵn) nếu:

$$x(n) = x(-n); \forall n$$

❖ Tín hiệu $x(n)$ được gọi là phản đối xứng (lẻ) nếu:

$$x(n) = -x(-n); \forall n$$



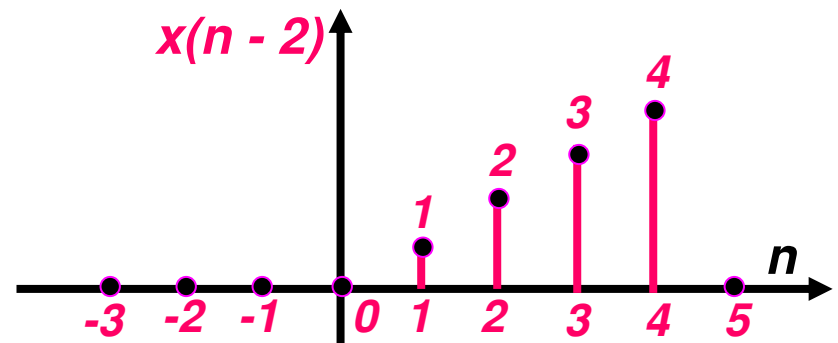
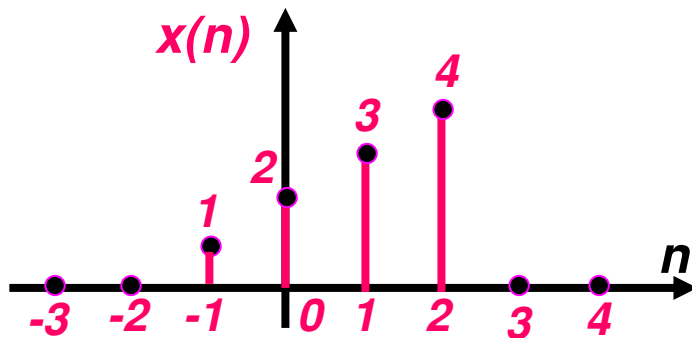
Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

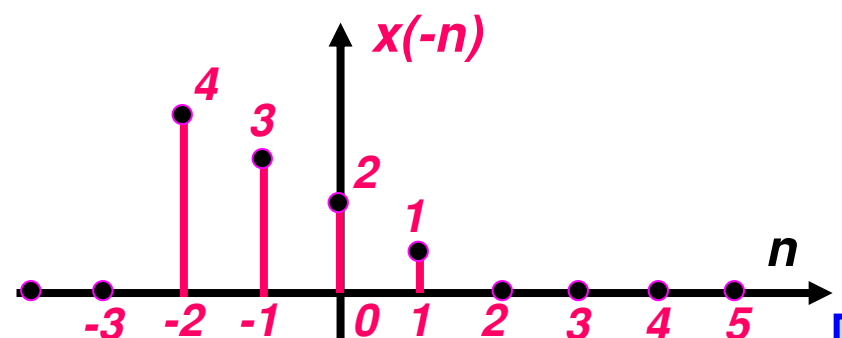
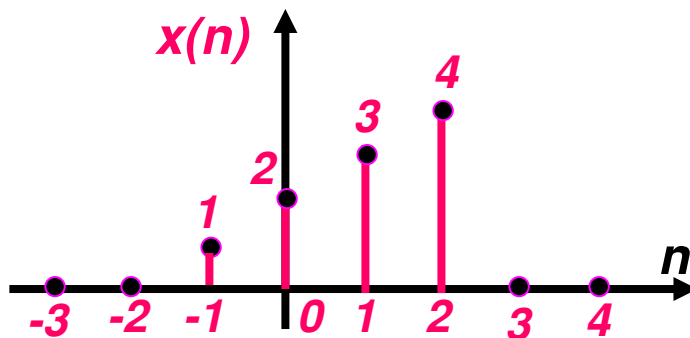
3.1.4 Các phép xử lý trên tín hiệu rời rạc:

a. Các phép biến đổi trên biến độc lập n :

❖ **Phép dịch:** $y(n) = x(n-n_0]$



❖ **Phép đảo ngược (gấp):** $y(n) = x[-n]$





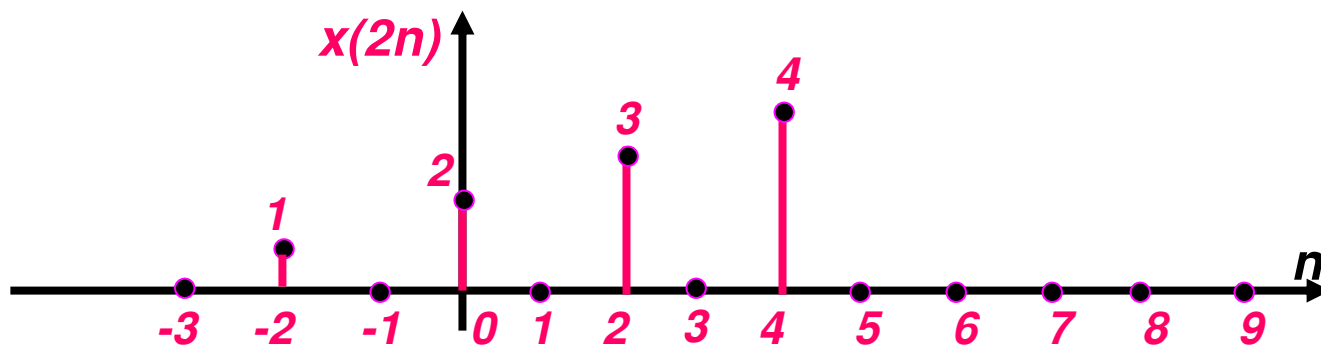
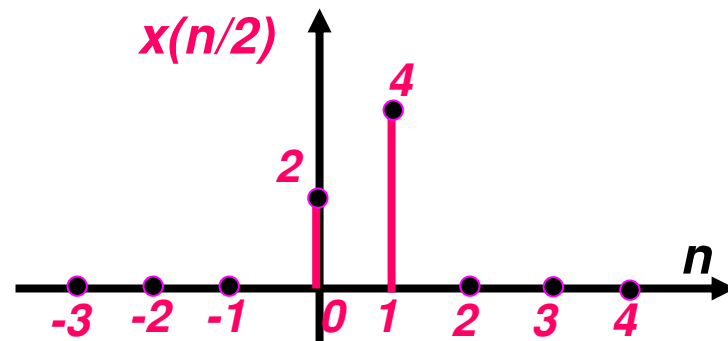
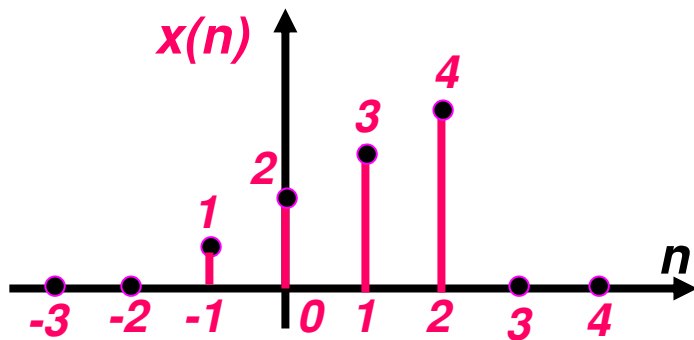
Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

a. Các phép biến đổi trên biến độc lập n (tt):

❖ Phép lập tỉ lệ thời gian:

$$y(n) = x(Mn)$$





Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

3.1 Tín hiệu rời rạc (tt):

3.1.4 Các phép xử lý trên tín hiệu rời rạc (tt):

b. Phép cộng hai tín hiệu:

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

Cộng tương ứng từng mẫu của hai tín hiệu

Ví dụ 4: $x_1(n) = [1, 2, 0, 4, 6, 0, 5]$; $x_2(n) = [3, 2, 1, 1, 3, 1, 0]$.

Khi đó: $x(n) = x_1(n) + x_2(n) = [1, 4, 2, 5, 7, 3, 6, 0]$;

c. Phép nhân hai tín hiệu:

$$x(n) = x_1(n) \times x_2(n)$$

Nhân tương ứng từng mẫu của hai tín hiệu

Ví dụ 5: $x_1(n) = [1, 2, 0, 4, 6, 0, 5]$; $x_2(n) = [3, 2, 1, 1, 3, 1, 0]$.

Khi đó: $x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) = [1, 6, 0, 4, 6, 0, 5, 0]$;

c. Phép nhân hai tín hiệu:

$$x(n) = A \times x_1(n)$$

Nhân A với từng mẫu của tín hiệu

Ví dụ 6: $x_1(n) = [1, 2, 0, 4, 6, 0, 5]$;

Khi đó: $x(n) = 2 \cdot x_1(n) = [2, 4, 0, 8, 12, 0, 10]$;

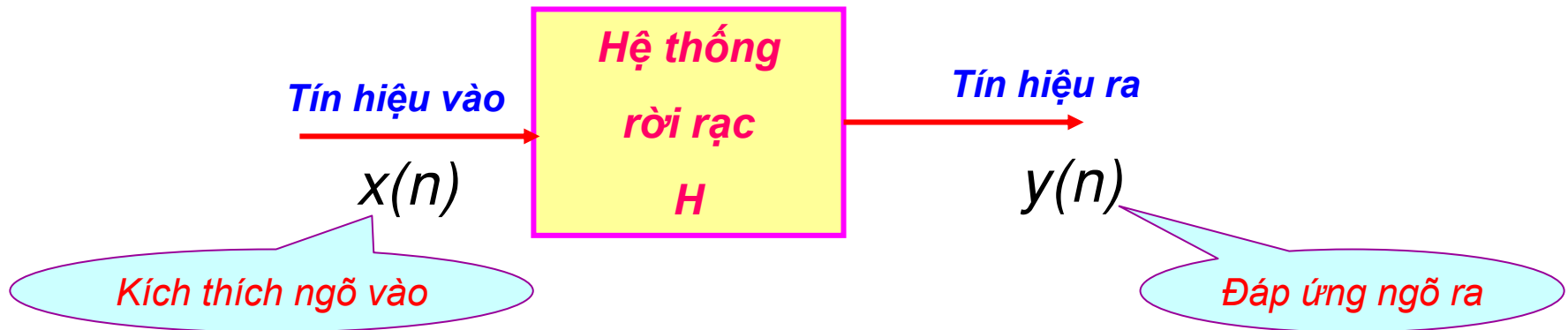


Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

3.2 Hệ thống rời rạc:

- một phép biến đổi H tác động lên tín hiệu ngõ vào $x(n)$ để tạo ra tín hiệu ngõ ra
- có thể được thực hiện bằng phân cứng, phần mềm hay kết hợp cả hai.
- Sơ đồ khối tổng quát:



➤ Ký hiệu:
$$x(n) \xrightarrow{H} y(n)$$

hay:
$$y(n) = H [x(n)]$$



Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

3.2 Hệ thống rời rạc:

3.2.1 Mô tả hệ thống rời rạc:

a. Dùng phương trình tín hiệu ngõ vào – ngõ ra (phương trình I/O):

- biểu thức toán học mô tả quan hệ giữa tín hiệu ngõ vào và tín hiệu ngõ ra.
- không quan tâm đến cấu trúc vật lý bên trong của hệ thống.

Ví dụ 7: $y(n) = x^2(n)$;

$$y(n) = [x(n) + x(n-1) + x(n+1)]/3;$$

$$y(n) = 0.5y(n-1) + x(n) - x(n-1); \text{vv} \dots$$

Ví dụ 8: $x(n) = [0, 0, 1, 3, 5, \dots]$;

$$y(n) = x^2(n). \text{ Xác định ngõ ra?}$$

Ta có: $y(0) = x^2(0) = 0;$

$$y(3) = x^2(3) = 3^2 = 9;$$

$$y(1) = x^2(1) = 0;$$

$$y(4) = x^2(4) = 5^2 = 25; \dots$$

$$y(2) = x^2(2) = 1^2 = 1;$$

suy ra: $y(n) = [0, 0, 1, 9, 25, \dots];$



Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

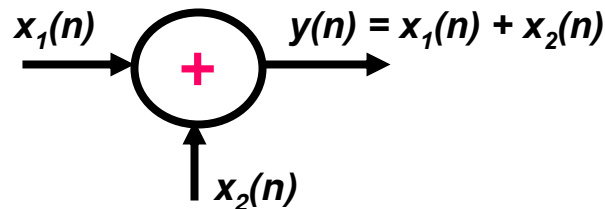
3.2.1 Mô tả hệ thống rời rạc:

b. Mô tả dùng sơ đồ khối:

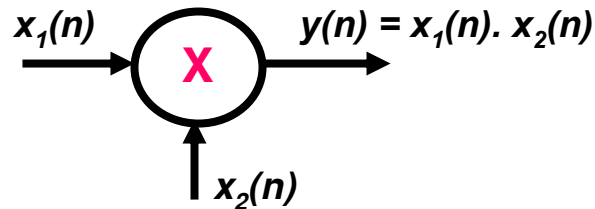
- giúp thấy được cấu trúc bên trong của hệ thống
- được xây dựng từ các khối cơ bản: bộ cộng, bộ nhân, bộ trễ, vv....

❖ Ký hiệu của các khối cơ bản:

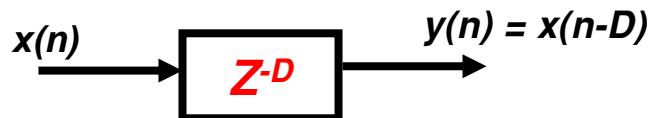
- Bộ cộng:



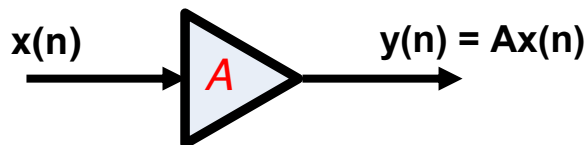
- Bộ nhân:



- Bộ trễ:



- Bộ khuếch đại:





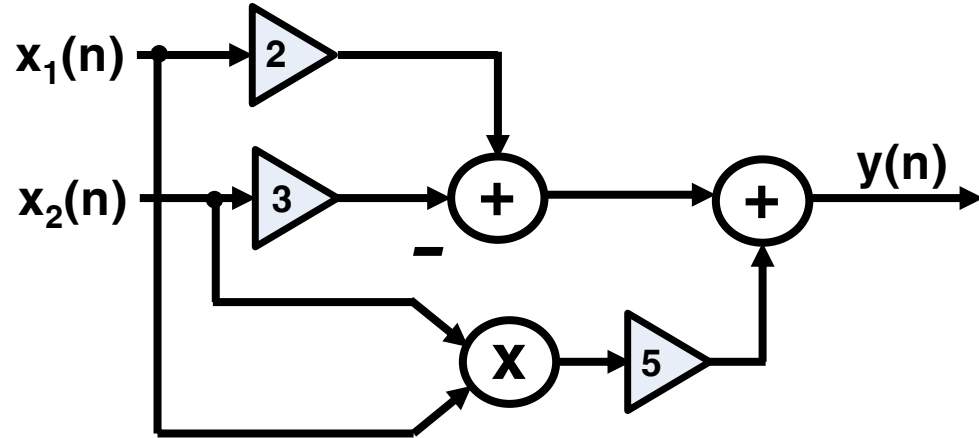
Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

b. Mô tả dùng sơ đồ khối (tt):

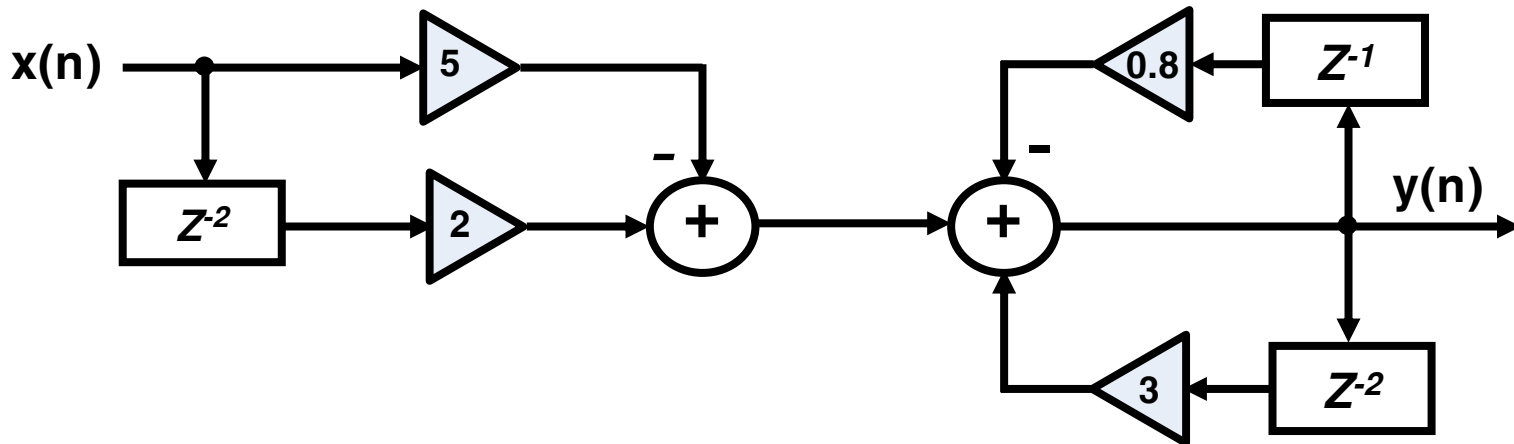
Ví dụ 8: Hệ thống có sơ đồ như hình bên tương ứng phương trình I/O:

$$y(n] = 2x_1(n) - 3x_2(n) + 5x_1(n)x_2(n)$$



Ví dụ 9: Vẽ sơ đồ khối thực hiện hệ thống sau:

$$y(n] = -5x(n) + 2x(n-2) - 0.8y(n-1) + 3y(n-2)$$





Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

3.2.2 Phân loại hệ thống rời rạc:

a. Hệ thống tĩnh/ động:

➤ *Hệ thống tĩnh (static) hay còn gọi là hệ thống không nhớ (memoryless) nếu đáp ứng $y(n)$ tại n_0 chỉ phụ thuộc vào giá trị của $x(n)$ tại n_0 . Ngược lại là hệ thống động (dynamic) hay có nhớ.*

➤ **Ví dụ 10:** $y(n) = 2x(n) - 3x^2(n) \rightarrow$ hệ thống tĩnh
 $y(n) = x(n) + x(n-2) \rightarrow$ hệ thống động

b. Hệ thống nhân quả/ không nhân quả:

➤ *Hệ thống nhân quả (causal) nếu đáp ứng của nó tạo thời điểm n_0 , $y(n_0)$, chỉ phụ thuộc vào $x(n)$, $n \leq n_0$. Ngược lại là hệ thống không nhân quả (non-causal).*

➤ **Ví dụ 11:** $y(n) = x(n) + 3x(n + 4) \rightarrow$ hệ thống không nhân quả
 $y(n) = x(n) - x(n - 1) \rightarrow$ hệ thống nhân quả
 $y(n) = x(n^2) \rightarrow$ hệ thống không nhân quả



Chương 3 TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

c. Hệ thống bất biến/ khả biến:

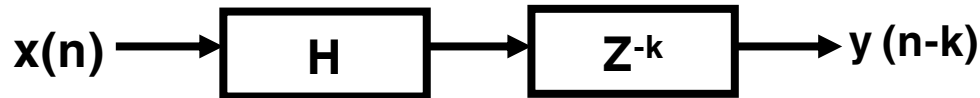
- hệ thống được gọi là bất biến theo thời gian (time invariant) nếu đặc tính vào - ra không thay đổi theo thời gian, nghĩa là:

Nếu:
$$x(n) \xrightarrow{H} y(n)$$

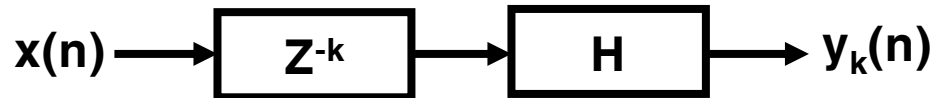
Thì:
$$x(n-k) \xrightarrow{H} y(n-k), \quad \forall k$$

- Cách kiểm tra tính chất bất biến:

- Đưa tín hiệu vào hệ thống, sau đó làm trễ $y(n)$ đi k mẫu \rightarrow thu được: $y(n-k)$.



- Làm trễ $x(n)$ đi k mẫu, sau đó đưa vào hệ thống \rightarrow ngõ ra thu được: $y_k(n)$.



- So sánh $y(n-k)$ và $y_k(n)$. Nếu bằng nhau \rightarrow hệ bất biến và ngược lại.

- Ví dụ 12: $y(n) = x(n) - x(n-1) \rightarrow$ hệ bất biến

$y(n) = x(n) \cdot \cos(\omega_0 n) \rightarrow$ hệ khả biến



Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

d. Hệ thống tuyến tính/ phi tuyến:

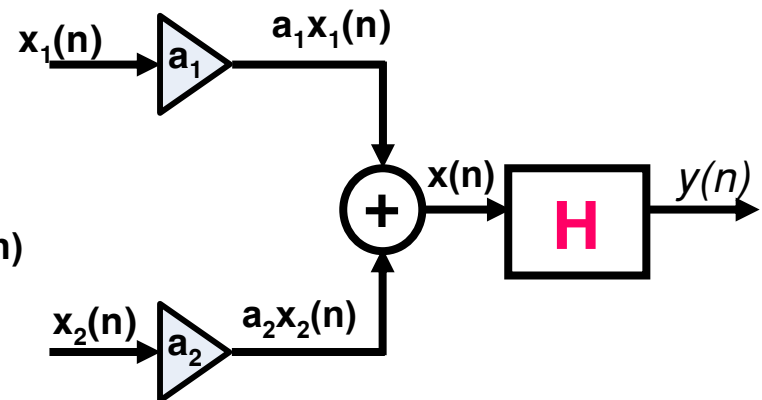
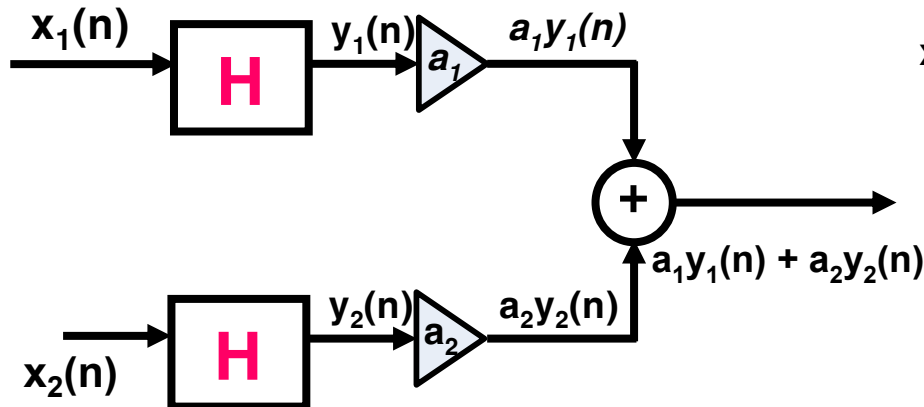
- hệ thống được gọi là tuyến tính (linear) nếu đặc tính vào - ra thỏa mãn nguyên lý chồng chập, nghĩa là:

$$H[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1H[x_1(n)] + a_2H[x_2(n)],$$

$$\forall x_1(n), x_2(n), a_1, a_2$$

- Cách kiểm tra tính chất tuyến tính:

- Thực hiện theo hai sơ đồ sau



- So sánh hai ngõ ra, nếu bằng nhau \rightarrow hệ tuyến tính và ngược lại.



Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

Ví dụ 9:

$$y(n) = 3x(n) + 3 \quad \rightarrow \text{hệ phi tuyến}$$

$$y(n) = nx(n) \quad \rightarrow \text{hệ tuyến tính}$$

$$y(n) = e^{x(n)} \quad \rightarrow \text{hệ phi tuyến}$$

e. Hệ thống đệ quy/ không đệ quy:

- *hệ thống được gọi là đệ quy (recursive) nếu đáp ứng ngõ ra tại thời điểm n_0 , $y(n_0)$, chỉ phụ thuộc vào giá trị nào đó của đáp ứng ngõ ra trong quá khứ. Ngược lại, ta gọi là hệ thống không đệ quy.*

Ví dụ 13:

$$y(n) = 3x(n) + 3x(n-1) + 5x(n+2) \quad \rightarrow \text{không đệ quy.}$$

$$y(n) = 0.25y(n-2) + x(n) + 2x(n-1) \quad \rightarrow \text{hệ đệ quy.}$$

e. Hệ thống ổn định/ không ổn định:

- *hệ thống được gọi là ổn định (stable) nếu nó luôn có đáp ứng bị chặn với mọi kích thích bị chặn. Nghĩa là:*

$$\text{Nếu: } |x(n)| \leq M_x \leq \infty \quad \text{thì: } |y(n)| \leq M_y \leq \infty, \quad \forall n$$



Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC (tt)

Bài tập:

3.1 (bài 4.1.3 trang 126)

3.2 (bài 4.1.5 trang 126)

3.3 (bài 4.3.1 trang 127)

3.4 (bài 4.3.2 trang 127)

3.5 (bài 4.4.1 trang 127)

3.6 (bài 4.4.4 trang 127)

3.7 (bài 4.4.5 trang 128)

3.8 (bài 4.5.1 trang 128)